

令和3年8月20日

第11回「これからの算数・数学教育を考える会」

情報の重み付けからみる 高校数学の授業の取り組みについて

京都教育大学附属高等学校

吉田 耕平

E-mail: kyoshida@kyokyo-u.ac.jp

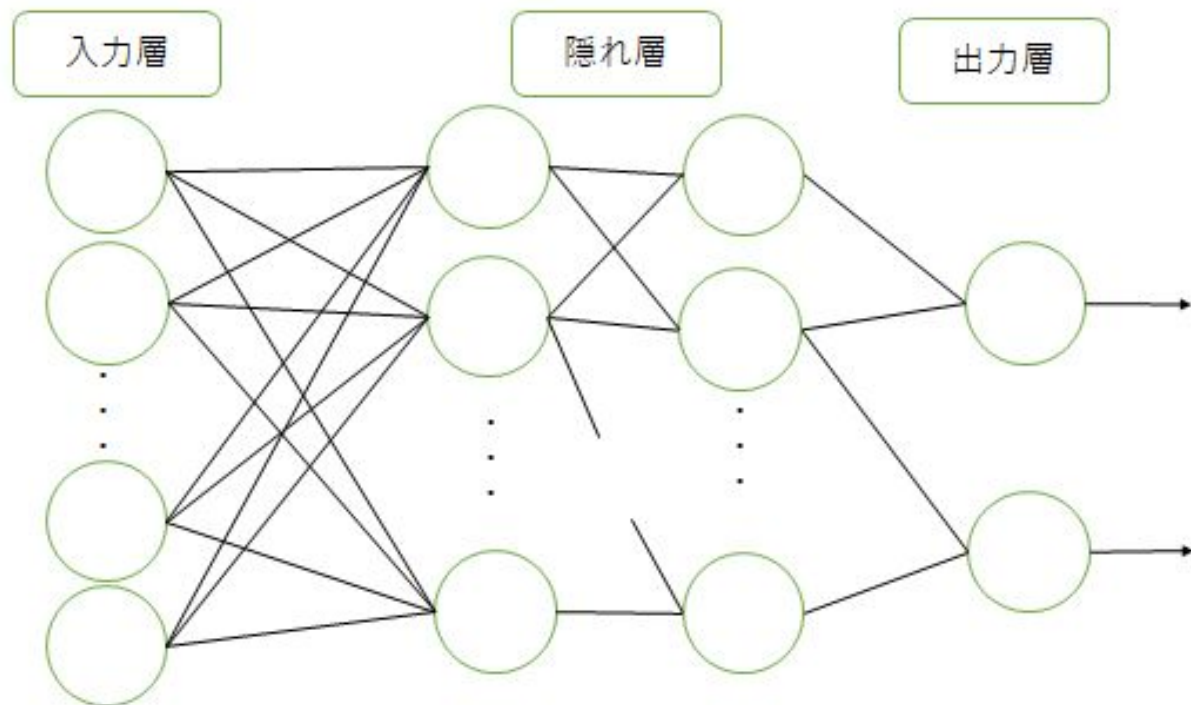
はじめに

- 発表の動機として
 - どの研究分野が近いのかアドバイスが欲しい。
- 研究の動機として
 - 深い学びを自分がわかるように明確化したい。
 - 機械学習の考え方からみて説明できないか？
 - 動画授業と対面授業について生徒の理解の仕方の違いを明確にできないか？
 - 課題研究を評価できないか？

ここでの目標

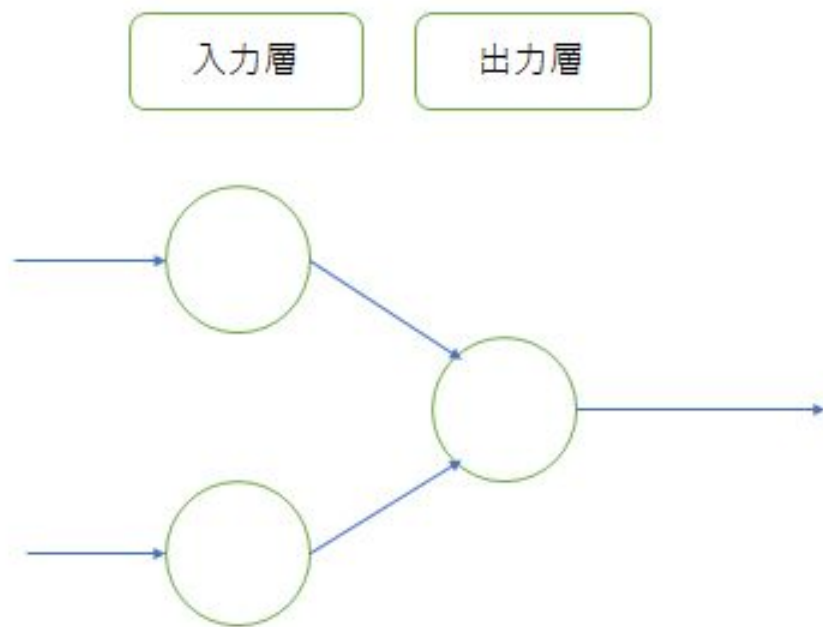
- 学習について自分なりに明確にする。
 - あわせて学習する内容を体系的に考える。

深層学習(ディープラーニング)について



はじめに

- ▶ 簡単なものから学んでいく（パーセプトロン）。



実際にデータで確認してみよう。

- 身長と体重からグループを分類したい。

身長	体重	グループ	
167.6	62.57	1	
155.69	49.13	0	
153.6	47.44	0	
168.87	64.44	1	
156.14	49.73	0	
170.04	67.44	1	



実際にデータで確認してみよう。

- 身長で降順するとわかりやすい。

身長	体重	グループ
170.04	67.44	1
168.87	64.44	1
167.60	62.57	1
156.14	49.73	0
155.69	49.13	0
153.60	47.44	0

身長 $> 165 \Rightarrow$ 「1」
言い換えると
身長 $- 165 > 0 \Rightarrow$ 「1」



入力層

出力層

身長

$\times 1$

$A = 1 \times \text{身長} + 0 \times \text{体重} - 165$ とし

$$h(A) = \begin{cases} 1 & A \geq 0 \\ 0 & A < 0 \end{cases}$$

体重

$\times 0$

重み
閾値 (しきいち)



他のデータで確認してみる。

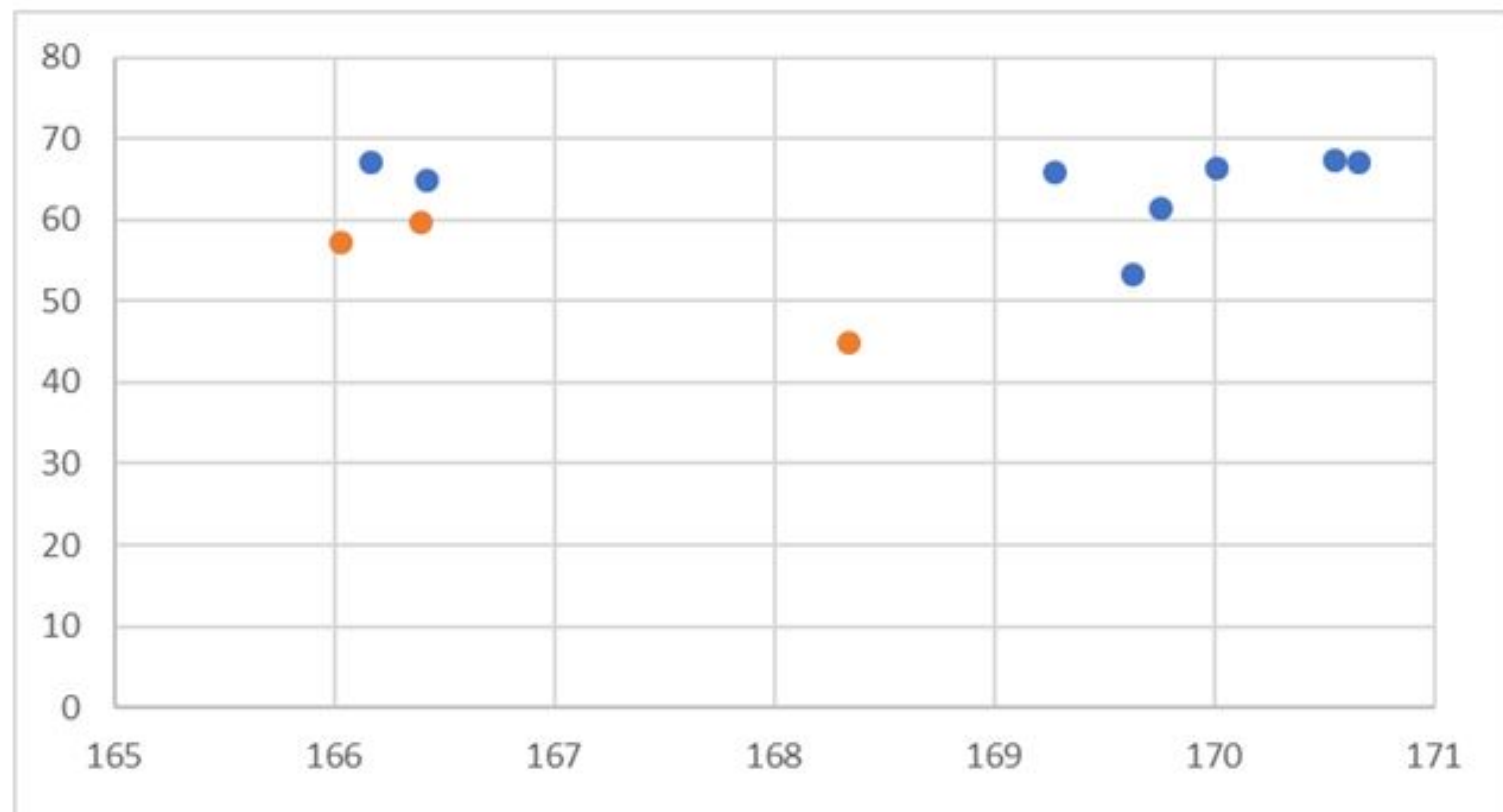
- 現実には身長だけでは分別できないものもでてくる。

身長	体重	グループ
170.66	67.07	1
170.54	67.23	1
170.02	66.35	1
169.76	61.50	1
169.63	53.20	1
169.28	65.78	1
168.34	45.00	0
166.42	65.00	1
166.39	59.66	0
166.17	67.00	1
166.03	57.26	0

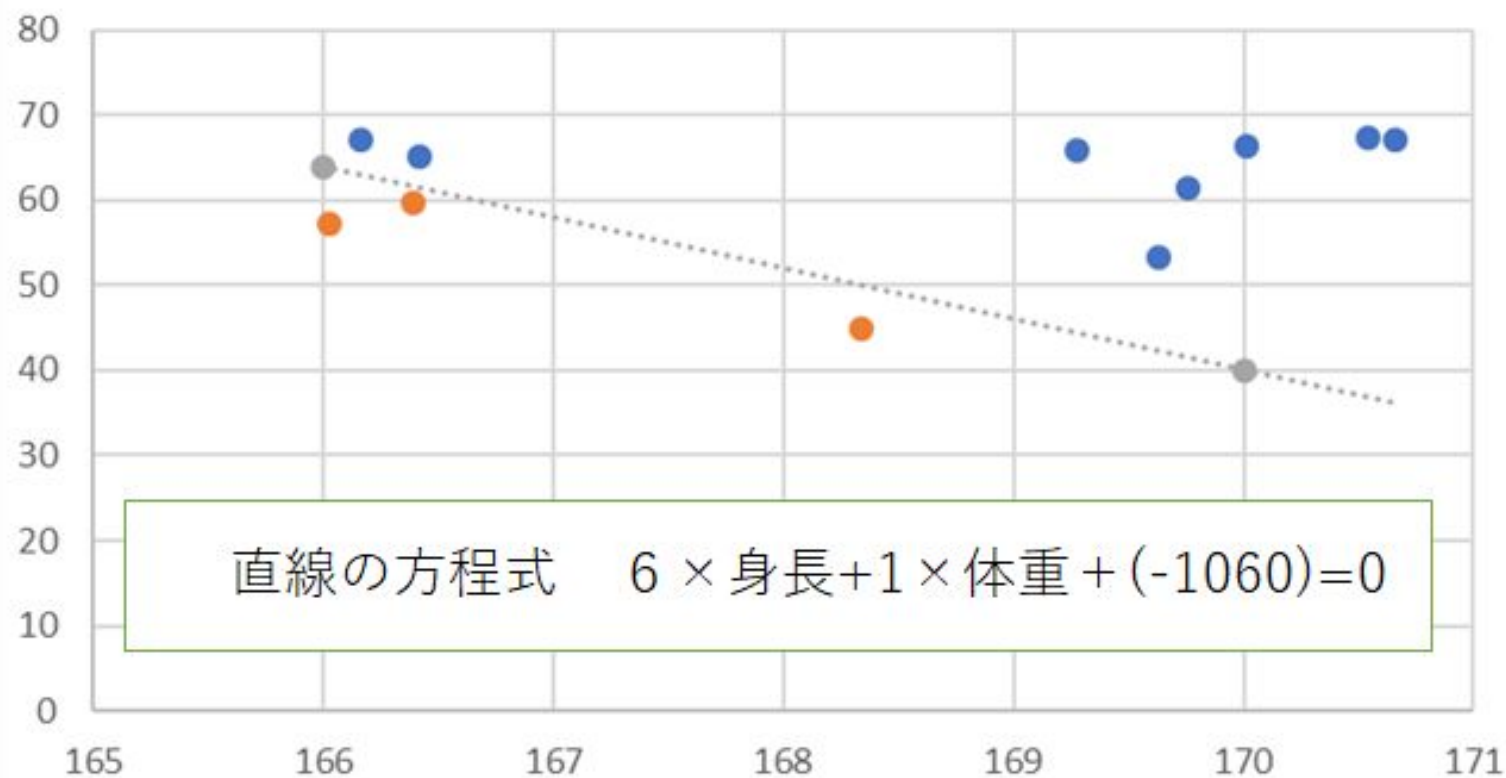
身長	体重	グループ
170.66	67.07	1
170.54	67.23	1
166.17	67.00	1
170.02	66.35	1
169.28	65.78	1
166.42	65.00	1
169.76	61.50	1
166.39	59.66	0
166.03	57.26	0
169.63	53.20	1
168.34	45.00	0



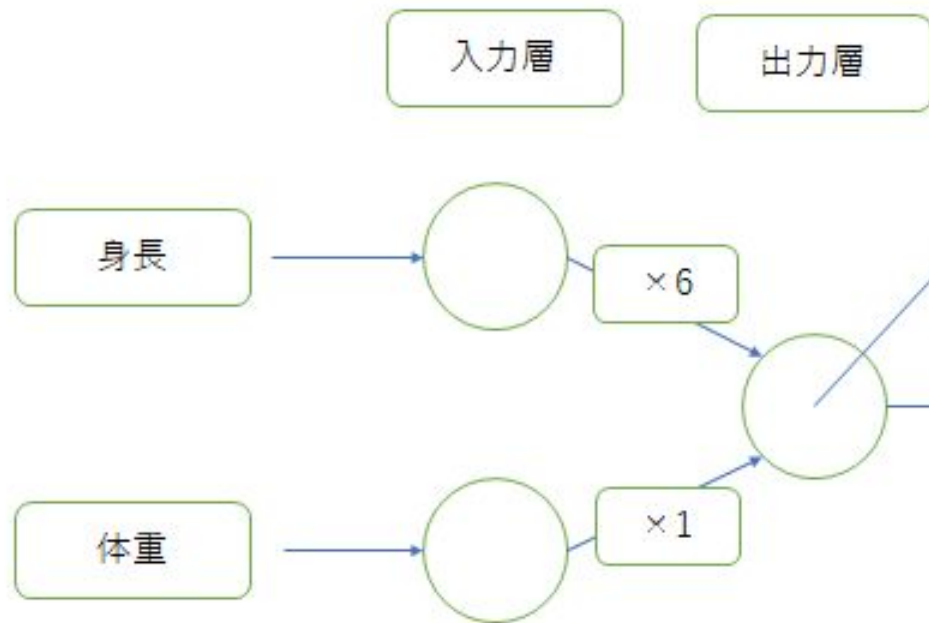
平面で考えてみる



平面で考えてみる



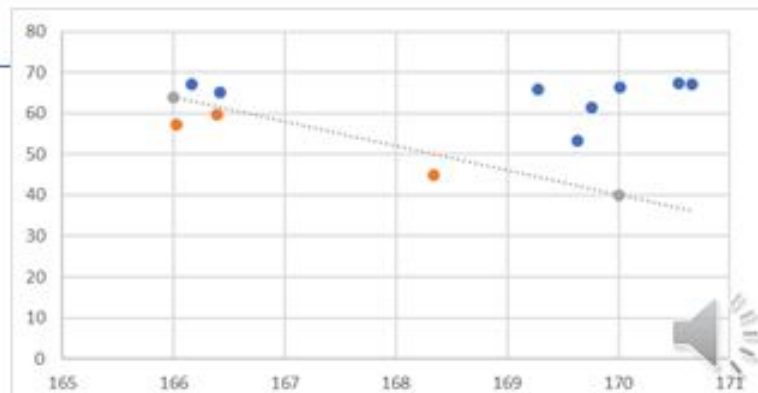
パーセプトロンでみると



重み
閾値 (しきいち)

$A = 6 \times \text{身長} + 1 \times \text{体重} - 1060$ とし

$$h(A) = \begin{cases} 1 & A \geq 0 \\ 0 & A < 0 \end{cases}$$



高校数学への使用方法

- 機械学習のように全てを数値化することは難しい
 - 言語により情報(知識)を表す。
- 確認することは、情報(知識)とその繋がり
- 繋がりの部分に重みを付ける。
 - 重みは重要視した度合いをつける。
 - 閾値は今回は触れません。

例題9 2点A(0,0)、B(3,0)からの距離の比が2:1である点Pの軌跡を求めよ。

(文献:川中宣明ほか,改訂版数学Ⅱ,数研出版, p.102, 2018.)

解答

点Pの座標を (x, y) とする。

Pの満たす条件は

$$AP : BP = 2 : 1$$

これより $AP = 2BP$ すなわち $AP^2 = 4BP^2$

$AP^2 = x^2 + y^2$, $BP^2 = (x-3)^2 + y^2$ を代入し整理すると

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

すなわち $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$ …… ①

ゆえに, 条件を満たす点Pは, 円①上にある。

逆に, 円①上の任意の点P (x, y) は, 条件を満たす。

よって, 求める軌跡は, 中心が点 $(4, 0)$, 半径が2の円である。

例題9 2点A(0,0)、B(3,0)からの距離の比が2:1である点Pの軌跡を求めよ。 (文献:川中宣明ほか, 改訂版数学Ⅱ, 数研出版, p.102, 2018.)

解答

点Pの座標を (x, y) とする。

Pの満たす条件は

$$AP : BP = 2 : 1$$

これより $AP = 2BP$ すなわち $AP^2 = 4BP^2$

$AP^2 = x^2 + y^2$, $BP^2 = (x-3)^2 + y^2$ を代入し整理すると

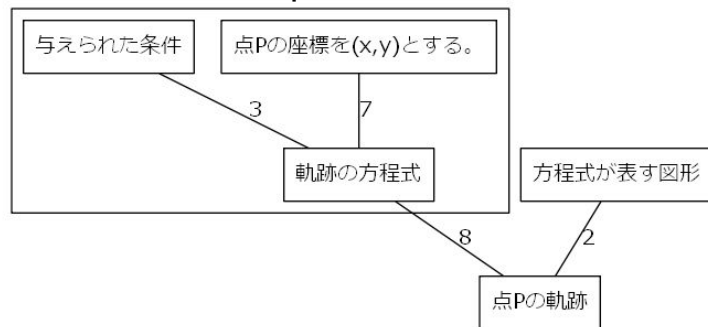
$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

すなわち $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$ …… ①

ゆえに、条件を満たす点Pは、円①上にある。

逆に、円①上の任意の点P (x, y) は、条件を満たす。

よって、求める軌跡は、中心が点 $(4, 0)$, 半径が2の円である。

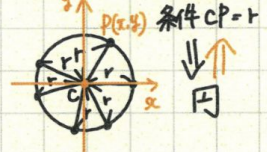


学習するということは

- 情報(知識)とその繋がりを明確化する。
- 情報同士を自分なりに重みをつけて繋げる。

軌跡と方程式

与えられた条件を満たす点、が動いてできる図形



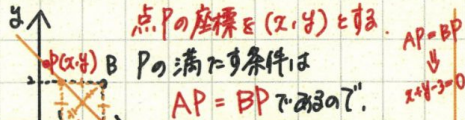
$$CP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad x^2 + y^2 = r^2$$

① 一定の条件を満たす点の集合

条件 \Rightarrow 図形

例 (1) 2点 A(1, 0), B(3, 2) から等距離にある点 P の軌跡 (条件)



$$AP = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \dots \textcircled{1}$$

$$BP = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \text{ より, } \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

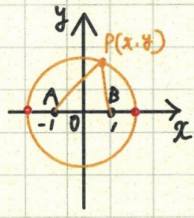
$$\text{両辺を2乗して, } (x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\text{整理すると, } x + y - 3 = 0$$

ゆえに、条件を満たす点 P は直線 $x + y - 3 = 0$ 上にある。

逆に、直線 $x + y - 3 = 0$ 上の任意の点 P(x, y) は条件を満たす。よって求める軌跡は、直線 $x + y - 3 = 0$ である。...

(2) 三角形 ABP において、2点 A(-1, 0), B(1, 0) からの距離の2乗の和が10下にある点 P の軌跡を求めよ。



点 P の座標を (x, y) とする。

P の満たす条件は、

$$AP^2 + BP^2 = 10$$

$$AP^2 = (x+1)^2 + y^2 \dots \textcircled{1}$$

$$BP^2 = (x-1)^2 + y^2 \dots \textcircled{2}$$

よって $\textcircled{1} + \textcircled{2} = 10$ より

$$\{(x+1)^2 + y^2\} + \{(x-1)^2 + y^2\} = 10$$

$$\text{整理すると, } x^2 + y^2 = 4 \dots \textcircled{3}$$

ゆえに条件を満たす点 P は、円 $\textcircled{3}$ 上にある。

逆に、円 $\textcircled{3}$ 上の任意の点 P(x, y) は、円 $\textcircled{3}$ 上にある。

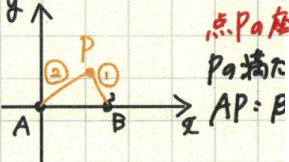
よって求める軌跡は、中心 (0, 0) 半径 2 の円である。

※ 求めた図形が必ず条件を満たすとは限らない!!

ただし、円 $\textcircled{3}$ 上の点 P(x, y) (-2, 0) (2, 0) があるとき、3点 A, B, P は一直線上にあるから条件を満たさない。よって求める軌跡は、中心 (0, 0), 半径 2 の円のうち、(-2, 0), (2, 0) を除いたものである。

(3) 2点 A(0, 0), B(3, 0) からの距離の比が

2:1 である点 P の軌跡を求めよ。



点 P の座標を (x, y) とする。

P が満たす

$$AP:BP = 2:1$$

AP = 2BP であるから、両辺を2乗すると、

$$AP^2 = 4BP^2 \text{ である。}$$

$$AP^2 = x^2 + y^2 \dots \textcircled{1}, \quad BP^2 = (x-3)^2 + y^2 \dots \textcircled{2}$$

よって $\textcircled{1} = 4 \times \textcircled{2}$ より、

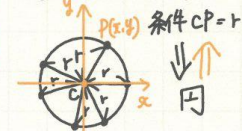
$$x^2 + y^2 = 4\{(x-3)^2 + y^2\}, \text{ 整理すると } (x-4)^2 + y^2 = 4 \dots \textcircled{3}$$

ゆえに、条件を満たす点 P は、円 $\textcircled{3}$ 上にある。

逆に、円 $\textcircled{3}$ 上の任意の点 P(x, y) は、条件を満たす。よって求める軌跡は、中心 (4, 0) 半径 2 の円である。...

軌跡と方程式

与えられた条件を満たす点、軌跡
動いてできる図形



$$CP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad x^2 + y^2 = r^2$$

① 一定の条件を満たす点の集合

条件 \Rightarrow 図形

10x75 どのに重要度2かか

よって ①+② = 10 式

$$\{(x+1)^2 + y^2\} + \{(x-1)^2 + y^2\} = 10$$

整理すると, $x^2 + y^2 = 4 \dots ③$

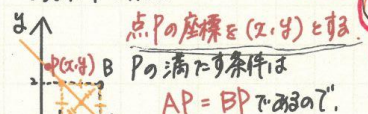
ゆえに条件を満たす点Pは、円③上にある。

逆に、円③上の任意の点P(x, y)は、円③上にある。

よって求める軌跡は、中心(0,0)半径2の円である。

※ 求めた図形が必ず条件を満たすとは限らない!!

(例) (1) 2点A(1,0), B(3,2)から等距離にある点Pの軌跡 (条件)



$$AP = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \dots ①$$

$$BP = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \dots ②$$

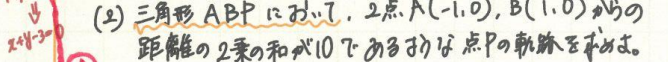
$$① = ② \text{ より, } \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\text{これを2乗して, } (x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\text{整理すると, } x + y - 3 = 0$$

ゆえに、条件を満たす点Pは直線 $x+y-3=0$ 上にある。
逆に、直線 $x+y-3=0$ 上の任意の点P(x, y)は、条件を満たすよって求める軌跡は、直線 $x+y-3=0$ である。... (答)

(2) 三角形ABPにおいて、2点A(-1,0), B(1,0)からの距離の2乗の和が10である点Pの軌跡を求めよ。



$$AP^2 = (x+1)^2 + y^2 \dots ①$$

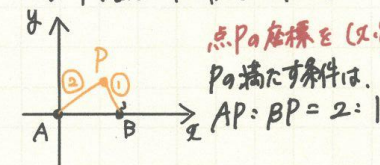
$$BP^2 = (x-1)^2 + y^2 \dots ②$$

$$AP^2 + BP^2 = 10$$

$$\text{よって求める軌跡は、円 } x^2 + y^2 = 4 \text{ である。}$$

ただし、円②上の点P(-2,0)(2,0)にあるとき、3点A, B, Pは一直線上にあるから条件を満たさない。よって求める軌跡は、中心(0,0)、半径2の円のうち、(-2,0), (2,0)を除いたものである。

(3) 2点A(0,0), B(9,0)からの距離の比が2:1である点Pの軌跡を求めよ。



$$AP = 2BP \text{ であるので、これを2乗すると、}$$

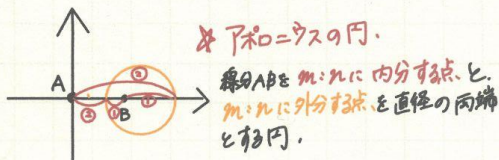
$$AP^2 = 4BP^2 \text{ である。}$$

$$AP^2 = x^2 + y^2 \dots ①, \quad BP^2 = (x-9)^2 + y^2 \dots ②$$

$$\text{よって } ① = 4 \times ② \text{ 式。}$$

$$x^2 + y^2 = 4\{(x-9)^2 + y^2\}, \text{ 整理すると } (x-4)^2 + y^2 = 4 \dots ③$$

ゆえに、条件を満たす点Pは、円③上にある。
逆に、円③上の任意の点P(x, y)は、条件を満たす。よって求める軌跡は、中心(4,0)、半径2の円である。... (答)

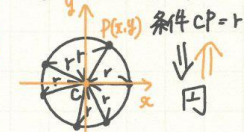


※ PはOを中心とする円。

線分ABを m:n に内分する点と、m:n に外分する点を直径の両端とする円。

軌跡と方程式

与えられた条件を満たす点、を動かしてできる図形



$$CP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad x^2 + y^2 = r^2$$

① 一定の条件を満たす点の集合

条件 ⇔ 図形

10x75 どちらにも重要度2かか

よって ①+② = 10 だ

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 10$$

整理すると、 $x^2 + y^2 = 4$... ③

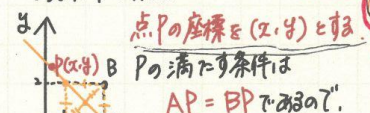
ゆえに条件を満たす点Pは、円③上にある。

逆に、円③上の任意の点P(x, y)は、円③上にある。

よって求める軌跡は、中心(0,0)半径2の円である。

※ 求めた図形が必ず条件を満たすとは限らない!!

(例) (1) 2点A(1,0), B(3,2)から等距離にある点Pの軌跡 (条件)



$$AP = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \quad \dots ①$$

$$BP = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \quad \dots ②$$

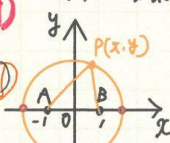
$$① = ② \text{ より, } \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\text{これを2乗して, } (x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\text{整理すると, } x + y - 3 = 0$$

ゆえに、条件を満たす点Pは直線 $x + y - 3 = 0$ 上にある。
① 逆に、直線 $x + y - 3 = 0$ 上の任意の点P(x, y)は、条件を満たすよって求める軌跡は、直線 $x + y - 3 = 0$ である。... (答)

(2) 三角形ABPにおいて、2点A(-1,0), B(1,0)からの距離の2乗の和が10である点Pの軌跡を求めよ。



$$AP^2 = (x+1)^2 + y^2 \quad \dots ①$$

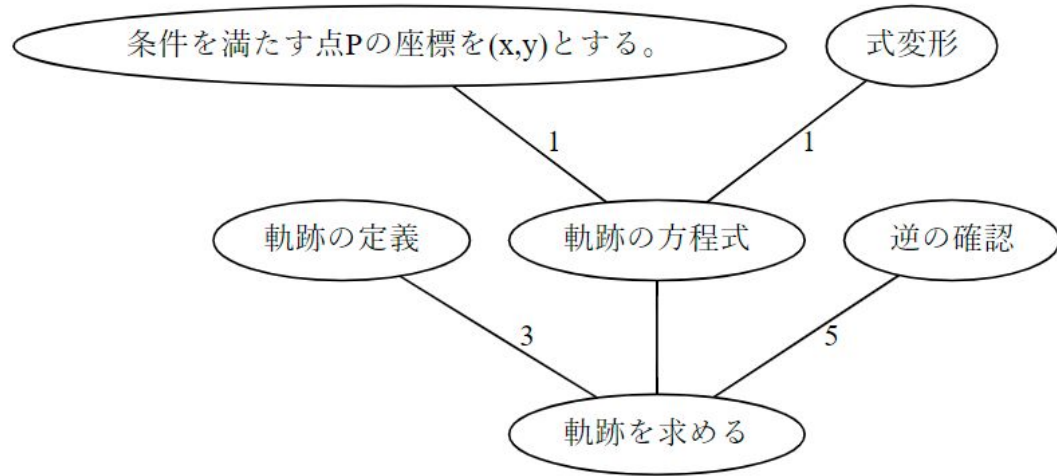
$$BP^2 = (x-1)^2 + y^2 \quad \dots ②$$

$$AP^2 + BP^2 = 10$$

$$AP^2 = (x+1)^2 + y^2 \quad \dots ①$$

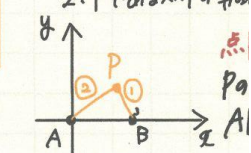
$$BP^2 = (x-1)^2 + y^2 \quad \dots ②$$

+ 2x ~



ただし、円③上の点Pが1にあるとき、3点A, B, P1があるから条件を満たさなよって求める軌跡は、円の円のうち、(-2,0)に

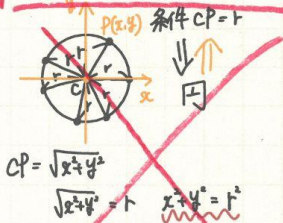
(3) 2点A(0,0), B(9,2)である点Pの軌跡



⑤ ⑥ B ... 軌跡を求める ... とする円。

軌跡と方程式

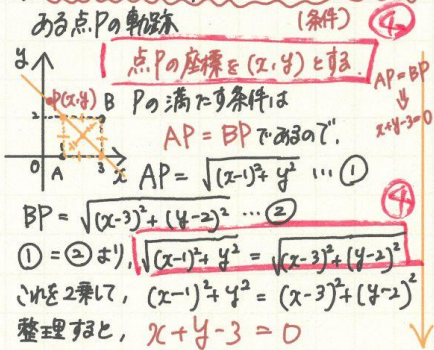
① 与えられた条件を満たす点の軌跡を求める図形



① 一定の条件を満たす点の集合

条件 = 図形

(例) (1) 2点 A(1, 0), B(3, 2) から等距離にある点 P の軌跡 (条件) ④

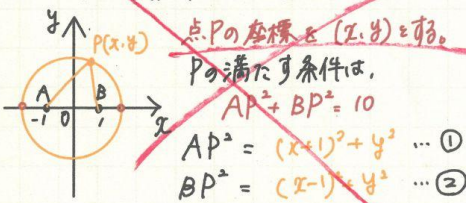


直線

ゆえに、条件を満たす点 P は直線 $x + y - 3 = 0$ 上にある。

① 逆に、直線 $x + y - 3 = 0$ 上の任意の点 P(x, y) は条件を満たす。よって求める軌跡は、直線 $x + y - 3 = 0$ である。... (完)

(2) 三角形 ABP において、2点 A(-1, 0), B(1, 0) からの距離の2乗の和が10である点 P の軌跡を求めよ。



円

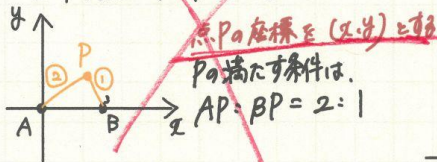
よって ① + ② = 10 より
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 10$
 整理すると、 $x^2 + y^2 = 4$... ③
 ゆえに条件を満たす点 P は、円③上にある。

逆に、円③上の任意の点 P(x, y) は、円③上にある。
 よって求める軌跡は、中心(0, 0)半径2の円である。

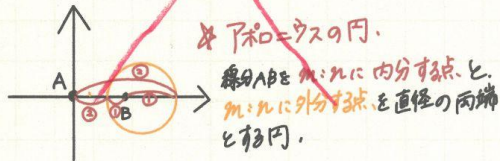
※ 求めた図形が必ず条件を満たすとは限らない!!

ただし、円③上の点 P(x, y) (-2, 0) (2, 0) には、2点 A, B, P は一直線上にあるから条件を満たさない。
 よって求める軌跡は、中心(0, 0)半径2の円のうち、(-2, 0), (2, 0) を除いたものである。

(3) 2点 A(0, 0), B(3, 0) からの距離の比が 2:1 である点 P の軌跡を求めよ。

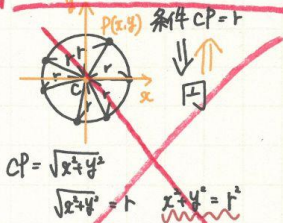


$AP = 2BP$ であるので、両辺を2乗すると、
 $AP^2 = 4BP^2$ である。
 $AP^2 = x^2 + y^2$... ①, $BP^2 = (x-3)^2 + y^2$... ②
 よって ① = 4 × ② より、
 $x^2 + y^2 = 4[(x-3)^2 + y^2]$ 、整理すると $x^2 + y^2 = 4(x-3)^2 + 4y^2$... ③
 ゆえに、条件を満たす点 P は、円③上にある。
 逆に、円③上の任意の点 P(x, y) は、条件を満たす。
 よって求める軌跡は、中心(4, 0)半径2の円である。... (完)



軌跡と方程式

① 与えられた条件を満たす点の軌跡を求める図形



① 一定の条件を満たす点の集合

条件 = 図形

(例) ① 2点 A(1, 0), B(3, 2) から等距離にある点 P の軌跡 (条件) ④

ある点 P の軌跡 (条件) ④

点 P の座標を (x, y) とする。

P の満たす条件は $AP = BP$ である。

$AP = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$... ①

$BP = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$... ②

① = ② より、 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$

これを2乗して、 $(x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$

整理すると、 $x + y - 3 = 0$

ゆえに、条件を満たす点 P は直線 $x + y - 3 = 0$ 上にある。

① 逆に、直線 $x + y - 3 = 0$ 上の任意の点 P(x, y) は条件を満たす。よって求める軌跡は、直線 $x + y - 3 = 0$ である。... (完)

(2) 三角形 ABP において、2点 A(-1, 0), B(1, 0) からの距離の2乗の和が10である点 P の軌跡を求めよ。

点 P の座標を (x, y) とする。

P の満たす条件は、 $AP^2 + BP^2 = 10$

$AP^2 = (x+1)^2 + y^2$... ①

$BP^2 = (x-1)^2 + y^2$... ②

条件を満たす点 P の座標を (x, y) とする。

よって ① + ② = 10 より

$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 10$

整理すると、 $x^2 + y^2 = 4$... ③

ゆえに条件を満たす点 P は、円③上にある。

逆に、円③上の任意の点 P(x, y) は、円③上にある。

よって求める軌跡は、中心 (0, 0) 半径 2 の円である。

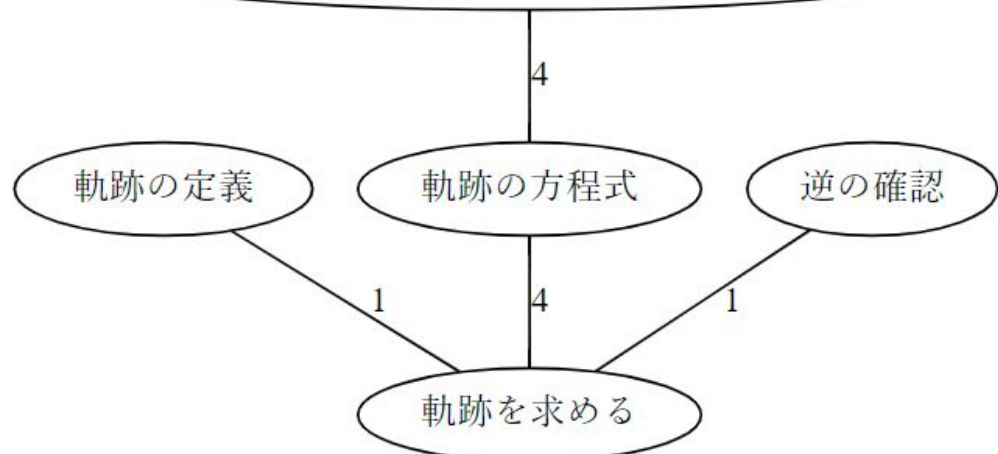
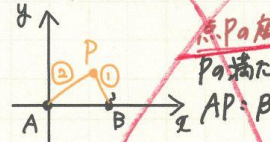
※ 求めた図形が必ず条件を満たすとは限らない!!

ただし、円③上の点 P が (-2, 1) にあるとき、3点 A, B, P は一直線上にあるから条件を満たさない。

よって求める軌跡は、中心 (0, 0) の円のうち、(-2, 1), (2, 0) を除く。

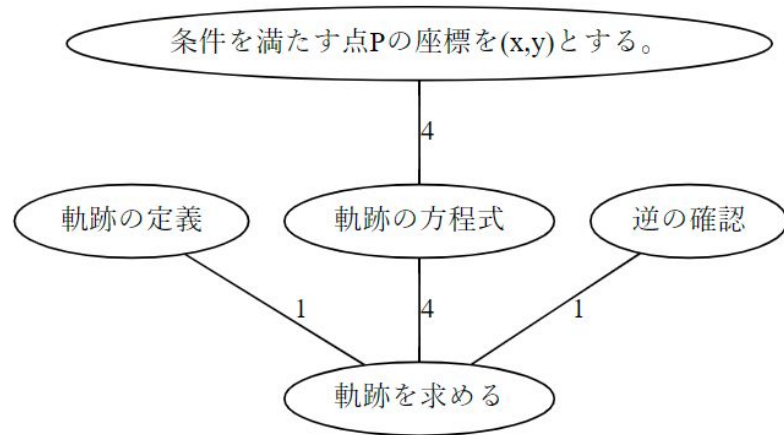
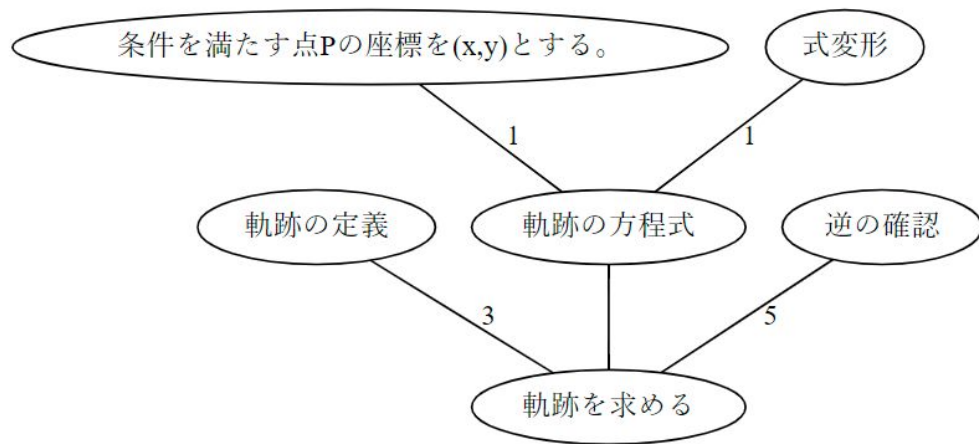
(3) 2点 A(0, 0), B(3, 0) の2:1 である点 P の軌跡を求めよ。

点 P の満たす条件は $AP = BP$



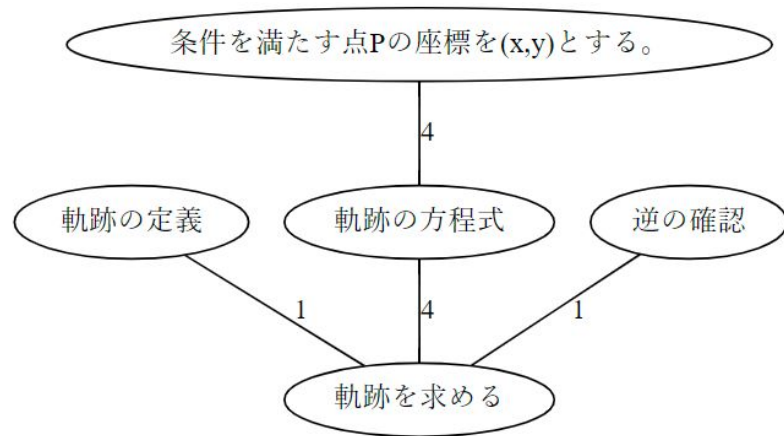
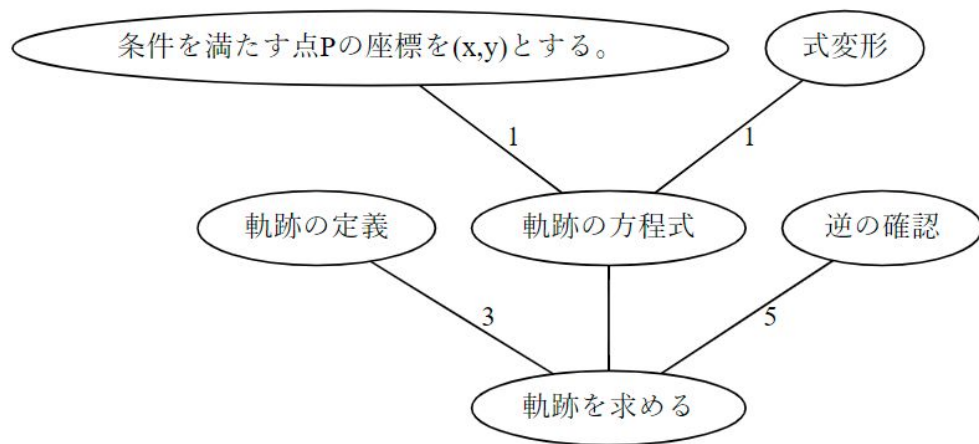
と相同.

考え方の違いを明確化

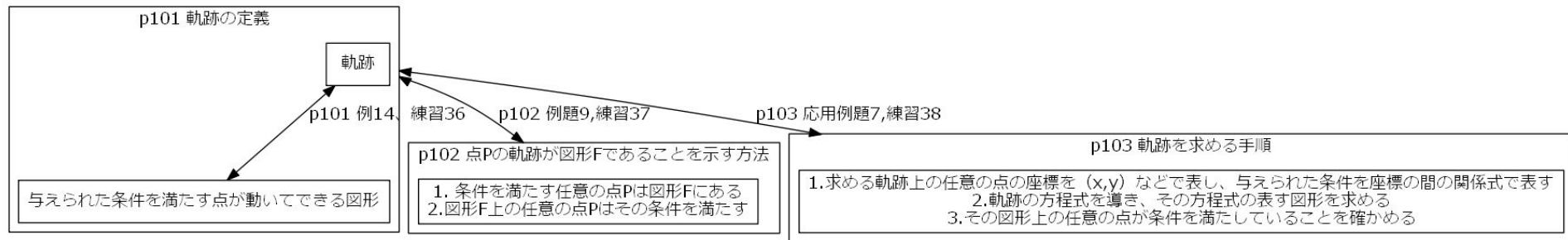


使用の上での課題として

- 情報(知識)の名づけ方が人による。
 - 教科書については情報の名づけ方を決めておく。



学ぶことを体系化 (文献:川中宣明ほか,改訂版数学Ⅱ,数研出版,2018.)



例 14 2点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$ からの距離の2乗の和が10である点 P の軌跡

練習 36 2点 $A(1,0)$, $B(3,2)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

例題 9 2点 $A(0,0)$, $B(3,0)$ からの距離の比が2:1である点 P の軌跡を求めよ。

練習 37 2点 $A(-1,0)$, $B(2,0)$ からの距離の比が1:2である点 P の軌跡を求めよ。

応用例題 7 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 16$ 上を動くとき、点 $A(6,0)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。

まとめ

- 学習については、情報(知識)とそのつながりを明確にし、重みをつける。
- 動画授業と対面授業の違いについて
 - 重みの値を教えるか、重みを考えさせるかの違いではないか？
- 課題研究の評価について
 - 色んな値を重みに入れて考えたか？
 - 課題研究のはじめと終わりの図の変化で評価をできないか？

ご清聴ありがとうございました。