

総合的な探究の時間を用いた 数学的モデリングの実践報告

京都府立北嵯峨高等学校

村井 翔馬

総合的な探究の時間の目標

【目標】

探究の見方・考え方を働かせ、横断的・総合的な学習を行うことを通して、自己の在り方生き方を考えながら、よりよく課題を発見し解決していくための資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

- (1) 探究の過程において、課題の発見と解決に必要な知識及び技能を身に付け、課題に関わる概念を形成し、探究の意義や価値を理解するようにする。
- (2) 実社会や実生活と自己との関わりから問いを見だし、自分で課題を立て、情報を集め、整理・分析して、まとめ・表現することができるようにする。
- (3) 探究に主体的・協働的に取り組むとともに、互いのよさを生かしながら、新たな価値を創造し、よりよい社会を実現しようとする態度を養う。

(高等学校学習指導要領「総合的な探究の時間」(平成30年7月)より抜粋 ※下線は引用者)



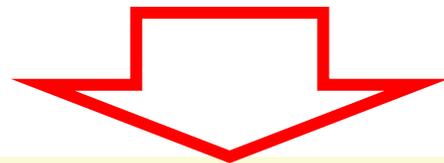
〈本校における到達目標〉

- ① 自分について深く考え、興味・関心のあることを発見し、将来の展望をもつ。
- ② ①に関する情報を自ら収集でき、それらを取捨選択できる力をつける。
- ③ ①②を踏まえて、自分について適切に表現・発信できる力をつける。

自然科学コース（理系発展クラス）での取り組み

〈本校における到達目標〉

- ① 自分について深く考え、興味・関心のあることを発見し、将来の展望をもつ。
- ② ①に関する情報を自ら収集でき、それらを取捨選択できる力をつける。
- ③ ①②を踏まえて、自分について適切に表現・発信できる力をつける。



〔自然科学コースでの探究活動の取り組み〕

○ テーマ設定

- ・ 物理チーム
生物チーム（各2～3班）
数学チーム
に分かれる。
- ・ 各班で探究テーマを設定



○ 探究活動

- ・ 情報収集、実験、観察
データ処理、分析 等
- ・ コンピュータ等の利用
- ・ まとめと発表準備



○ 発表

- ・ 発表資料は
スライドショーを作成
- ・ 発表10分、質疑応答5分
- ・ 発表後に相互評価

授業概要

○ **対象**：2年2組（自然科学コース）生徒34名

○ **時期**：2020年6月～2月の木曜5限
（一部時間割変更あり）

○ **内容**

・ 数学チーム

フェルミ推定と数学的モデリングによる問題解決

（
・ 物理チーム
落体の運動と空気抵抗

・ 生物チーム
松の葉の気孔と大気汚染度
）

授業計画 (備考の太字は予定変更後)

月	日	曜日	取組内容	備考
4	23	木	臨 時 休 校	
	30	木		
5	7	木		
	14	木		
	28	木		
6	4	木	ガイダンス	論述テスト返却、振り返りBOOK
	11	木	物理①	加速度、記録タイマー使い方 実験
	18	木	物理②	重力加速度の測定
	25	木	生物①	レポートの書き方、松の葉採取の分担
7	2	木	生物②	松の葉（萩原堤）の気孔観察（顕微鏡）
	9	木	生物③	松の葉（各班採取したもの）の気孔観察
	30	木	生物④	9日の続き、データ整理
9	10	木	表現トレ①	
	17	木	数学①	フェルミ推定について
	24	木	数学②	数学的モデリングについて
10	1	木	数学③	統計的仮説検定について

月	日	曜日	取組内容	備考
	15	木	表現トレーニング②	
	22	木	進路分野別説明会	※6/25の振替
	29	木	表現トレーニング③	探究チーム分け
11	5	木	人権学習	
	12	木	探求①	
	19	木	探求②	
	26	木	探求③	
12	10	木	探求④	
	17	木	探求⑤	
	24	木	探求⑥	
1	14	木	発表①	探究⑦
	28	木	進路関係	6h進路分野別説明会
2	4	木	発表②	探究⑧
	18	木	発表③	発表①② (2h)
	25	木	振り返り	

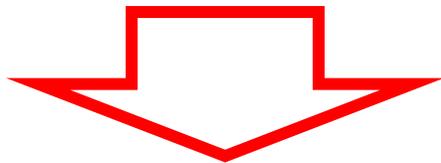
数学① 「フェルミ推定」について

「フェルミ推定」

・・・調査が難しい量を

論理的に推論

短時間で概算



○ 数学的モデリングの

条件整理

数学化

に相当

○ 問題解決1周目のモデルに適切

2-2 総合的な探究の時間 (9月17日) 数学①

()番 氏名()

【数学的思考力を用いた問題解決にチャレンジ】
～「フェルミ推定」と「数学的モデリング」～

「フェルミ推定」・・・実際に調査することが難しいような捉えどころのない量を、いくつかの手掛かりを元に論理的に推論し、短時間で概算すること。

ある問題に対して、自分で適切な条件を仮定したり、適当な数値を見積もったりして、論理的に問題の解を導くプロセスを立てる力が求められます。かつて、google や microsoft の入社試験にも出題されたことがあり、有名な問題に以下のようなものがあります。

例題：シカゴには何人のピアノの調律師がいるか？

【解答例】

まず以下のデータを仮定する。

- 1.シカゴの人口は300万人とする
- 2.シカゴでは、1世帯あたりの人数が平均3人程度とする
- 3.10世帯に1台の割合でピアノを保有している世帯があるとする
- 4.ピアノ1台の調律は平均して1年に1回行うとする
- 5.調律師が1日に調律するピアノの台数は3つとする
- 6.週休二日とし、調律師は年間に約250日働くとする

そして、これらの仮定を元に次のように推論する。

- 1.シカゴの世帯数は、 $(300 \text{万}/3) = 100 \text{万世帯程度}$
- 2.シカゴでのピアノの総数は、 $(100 \text{万}/10) = 10 \text{万台程度}$
- 3.ピアノの調律は、年間に10万件程度行われる
- 4.それに対し、(1人の)ピアノの調律師は1年間に $250 \times 3 = 750 \text{台程度}$ を調律する
- 5.よって調律師の人数は $10 \text{万}/750 = 130 \text{人程度}$ と推定される

出典：フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』 - フェルミ推定
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A7%E3%83%AB%E3%83%9F%E6%8E%AB%E5%AE%9A>

※フェルミ推定では、正解に近い値を出すこと以上に、論理的に正しい推論を組み立てることが大切！次のことを意識して考えてみよう。

- 問題場面に関連する値・要素を探す
- ある値が他の値から計算できるか考える
- 推論によって計算できない値は自分で仮定をおく

問題① 北嵯峨高校にあるスマートフォンの数は何台？

問題② 今日、北嵯峨高校にある自転車の数は何台？

問題③ 北嵯峨高校にある蛍光灯の数は何本？

数学② 数学的モデリングについて

「数学的モデリング」の流れ

- ① 現実モデル化（条件整理）
 - ・ 変量、条件、関係 等を整理
 - ② 数学モデル化（数学化）
 - ・ ①の条件を組み合わせ、方程式や関数 等を作成
 - ③ 数学問題を解く（数学的作業）
 - ④ 結果の分析・考察
 - ・ ③の結果を問題の文脈に直す
- ※必要ならばモデルを再考

() 番 氏名 ()

2-2 総合的な探究の時間 (9月17日) 数学①

「数学的モデリング」・・・ある現実の問題に対して、その問題を数式や図及びグラフなどの数学的表現（数学的モデル）で表した問題を作る。そして作った数学問題を解き、そこから得られた結果の分析・モデルの改良を通して、問題の解決を図ること。

現実モデル

↑ 条件整理

現実世界の問題

現実世界

→ 数学化

数学的モデル

↓ 数学的作業

数学的結果

数学の世界

← 解釈・評価

数学的モデリング過程の図

例題：ロープウェイ乗り場から山の麓までの距離は？

- ① 現実モデル化

右の図のようなロープウェイがある。ロープウェイ乗り場から山の麓までの距離を求めよう。ロープウェイは時速30kmで、約3分で山頂までたどり着く。山の高さは180mである。
- ② 数学モデル化

図を単純化して考えると、下の図のような直角三角形の底辺を求める問題に帰着できる。

By Pythagoras' theorem

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$180^2 + b^2 = 1500^2$$

$$b^2 = 1500^2 - 180^2$$

$$b^2 = 2\,277\,600$$

$$b = 1498 \text{ m}$$
- ③ 数学問題を解く

三平方の定理で問題を解くと、 $b \approx 1498$ (m) である。
- ④ 結果の分析・考察

山の斜面が垂直と仮定したが、実際は斜めになっている。また、ケーブルを直線と仮定したが、実際はたゆんでいる。これらのことから、実際は1498mよりも短くなるはずである。よって、山の麓までは1300m~1400mと考えられる。

出典：『Maths World year 9』(2007) pp.131-147 (オーストラリアの中学3年生用数学教科書)

問題：北越前高校では備品として、交換用の蛍光灯を何本置いておけばよいだろうか？

※ フェルミ推定の問題と同様に、問題場面で必要な変量を見つけ、数学の問題を作って値を求めよう。また、出てきた結果が妥当かどうかを評価し、問題のより良い解を求めよう。
 ※ 変量を数値だけでなく、文字においてモデルを作成してもOK!

数学③ 統計学的仮説検定について

2-2 総合的な探求の時間 (10月1日) 数学③

統計学的仮説検定の考え方と手順

参考 Web ページ:「高校数学の美しい物語」 <https://mathtrain.jp/kasetsukenitei>

【統計学における仮説検定】

・・・とある仮説が正しいかどうかを、統計学を使って判断する手法。

【仮説検定の手順】

- 1(設定): 帰無仮説 H_0 を立てる。
- 2(数学): 「帰無仮説 H_0 のもとで、統計量 T が確率分布 F に従う」となる T, F を探す。
- 3(計算): 実際にデータから計算した T が F の端っこにある場合、
仮説 H_0 は正しくなさそうなので棄却 (仮説は正しくない)と結論付ける。

帰無仮説 H_0 にはふつう、「間違いである」と結論付けたい仮説を立てる。

(例題) 表が出る確率が p であるコインを 100 回投げたときに表が 63 回出た。
 $p = \frac{1}{2}$ (コインが公平である) かどうか検定せよ。

[実験] 実際にコインを 100 回投げたとき、表が 63 回(以上)出る事象がどれくらい起こるかを確かめてみよう。

- 2人ペアになり、それぞれ 50 回ずつコインを投げ、表が出た回数を数える。
- 2人の表が出た回数の合計を以下の表に記入する。

班	1	2	3	4	5	6	7	8	9
表の回数									

班	10	11	12	13	14	15	16	17
表の回数								

この実験から、表が 63 回以上出る確率は・・・

以下で、実際に仮説検定を使って、このコインが公平かどうかを検定してみよう。

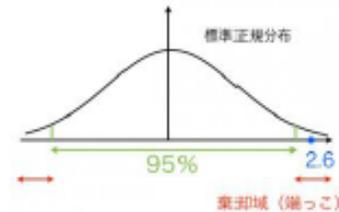
- 1(設定): 帰無仮説として $H_0: p = \frac{1}{2}$ (コインが公平である)とする。
- 2(数学): $p = \frac{1}{2}$ のとき、表が出る回数 X は二項分布 $B(100, \frac{1}{2})$ に従う。ここで、次のことを用いる。

二項分布 $B(n, p)$ は n が十分大きいとき、平均 np 、分散 $np(1-p)$ の正規分布に近づく。
すなわち、 $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は標準正規分布に従うとみなせる。

- 3(計算): 実際にデータから Z を計算する。この問題において、
表が 63 回出たので・・・ $X = 63$
試行回数はコインを 100 回投げたので・・・ $n = 100$
表が出る確率を $\frac{1}{2}$ と仮定しているので・・・ $p = \frac{1}{2}$
よって Z を計算すると、 $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{63 - 100 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \frac{63 - 50}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5} = 2.6$

標準正規分布に従う確率変数が 2.6 という値を取るのが、「端っこ」なのかどうかは判断する基準による。

例えば有意水準を 5% とすると「端っこ」とみなせる。つまり、コインは公平でない。



(問題) 表が出る確率が p であるコインを 10000 回投げたときに表が 5100 回出た。
 $p = \frac{1}{2}$ (コインが公平である) かどうか検定せよ。

ワークシート（下書き用）

問題の設定

条件整理

数学化

2-2 総合的な探求の時間 数学チーム 11月12日(木) ()班 ()番 氏名()

数学的モデリング ワークシート

① この班で考察・解決しようとする課題

② 課題を解決するために、解くべき問題

③ 問題を解くときに影響する変数、定数、条件を整理しよう。

④ 整理した変数、定数、条件をもとに、数学的な関係式や問題を作ろう。

⑤ 作成した数学の問題を解いて、数学的結果を導こう

⑥ 数学的結果を問題の文脈に直して、結果を分析しよう。

⑦ モデルを修正するために、追加する条件や、調整する変数、定数を考えよう。

※ ポイント・・・最初から完璧な答えを出そうとせず、初めは単純なモデルから考えて、少しずつ条件を追加して、より厳密な答えに近づけていくとよい。

数学的作業

分析・考察
モデルの再考

ワークシート（清書用）

○下書き用の内容を整理



○発表スライドショー
を作成

※ 実際は時間の都合で
直接発表スライドショー作成
に移る班が多かった

2-2 総合的な探求の時間 数学チーム 12月17日(木) ()班 班員氏名()

数学的モデリング(清書用) 問題解決 _____ 曜日 ④ 条件に基づいて数学の問題を解く

① この班で最終的に考察・解決したいテーマ

② 今回考える問題

③ 条件整理(変量を数値や文字でおく、変数の関係を式で表す など)

⑤ 結果の分析・考察、次に解くべき問題の設定

発表と相互評価シート

○ 発表

- ・ スライドショーを作成
- ・ 発表10分、質疑応答5分

○ 相互評価

- ・ 「発表の様子」
 - ・ 「研究内容」
 - ・ 「資料の完成度」
- の3項目について、
それぞれ5点満点で相互評価

2-2 総合的な探究の時間 研究発表会 相互評価シート

※評価のつけ方・・・最高点を「5」最低点を「1」とし、3項目それぞれ点数をつけ、合計点を記入する。下の空欄には一言コメントを記入する。

タイトル (発表者)	発表の様子 (声量・姿勢・興味を引く工夫 等)	研究内容 (内容への興味・探求方法・分析 等)	資料の完成度 (発表スライド・その他の資料 等)	合計点
① 松の気孔と汚染率	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
② 空気抵抗と底面積	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
③ 松の葉の汚染度からわかること	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
④ 排気ガスと汚染度の関係性	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
⑤ 空気抵抗～パラシュート実験～	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
⑥ とある場所を満喫してみた	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
⑦ エヴァンゲリオン零号機の投擲速度	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
⑧ 米で食べていくには1年でどれだけ収穫したらよいか	5 4 3 2 1 一言コメント:	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	

最も点数が高かった班 (②物理) は、
学年末に全校で行う「学習成果発表会」
の代表班に選出

本実践の成果と課題

○ 成果

- ・ 探究のテーマをほぼ生徒の自由に決めた課題で取り組ませることができたので、どの班の生徒も意欲的に探究を進められた。
- ・ およそ計10時間の準備時間で、数学的モデリングの講義、問題解決（2周）、発表準備（スライドショー作成）まで実施できた。

○ 課題

- ・ テーマ決めに苦戦した班は、十分に問題解決の時間を取れなかった。
- ・ テーマや問題の着地点の設定によっては、調べ学習で終わったり、何をすればよいかわからなくなったりする。
- ・ コンピュータによる情報収集はどこまでをOKとして、どこから仮定を自分たちで設定させるべきか。