いろいろな平均について
～相加・加重・相乗・調和～

山梨県立都留高等学校
松田　和真

自己紹介

京都府京都市出身

京都教育大学（深尾研究室）

↓

京都教育大学大学院（深尾研究室）

↓

京都府立南陽高等学校（９年間勤務）

↓

山梨県立都留高等学校（２年目）

Apple Teacher

ロイロ認定Teacher

現勤務校での取り組み①

◆よのなか科

現勤務校での取り組み②

◆つる探（探究活動　総合ゼミ）

高校数学の指導について

◆数学と日常のつながり
◆数学の有用性

抽象化していく高校数学の授業でこそ
上記を生徒が実感できるような教材の
作成や実践が必要！あとタイミング！

教科書＋αの部分をこまめに入れる

実践例）

①数学B　「数列」　等比数列の和

複利計算

→「単利」と「複利」の比較

それぞれのメリット・デメリット

預金と投資に関する教材

②数学Ⅰ　「データの分析」

→２変数の抽出　BYOD端末の活用

ロイロノート・Excel・Canvaを用いてレポート作成

プレゼン大会

③数学Ⅱ　「等式・不等式の証明」

→ある証明問題に対して複数の解答を準備

正答・誤答およびその理由を考察し言語化

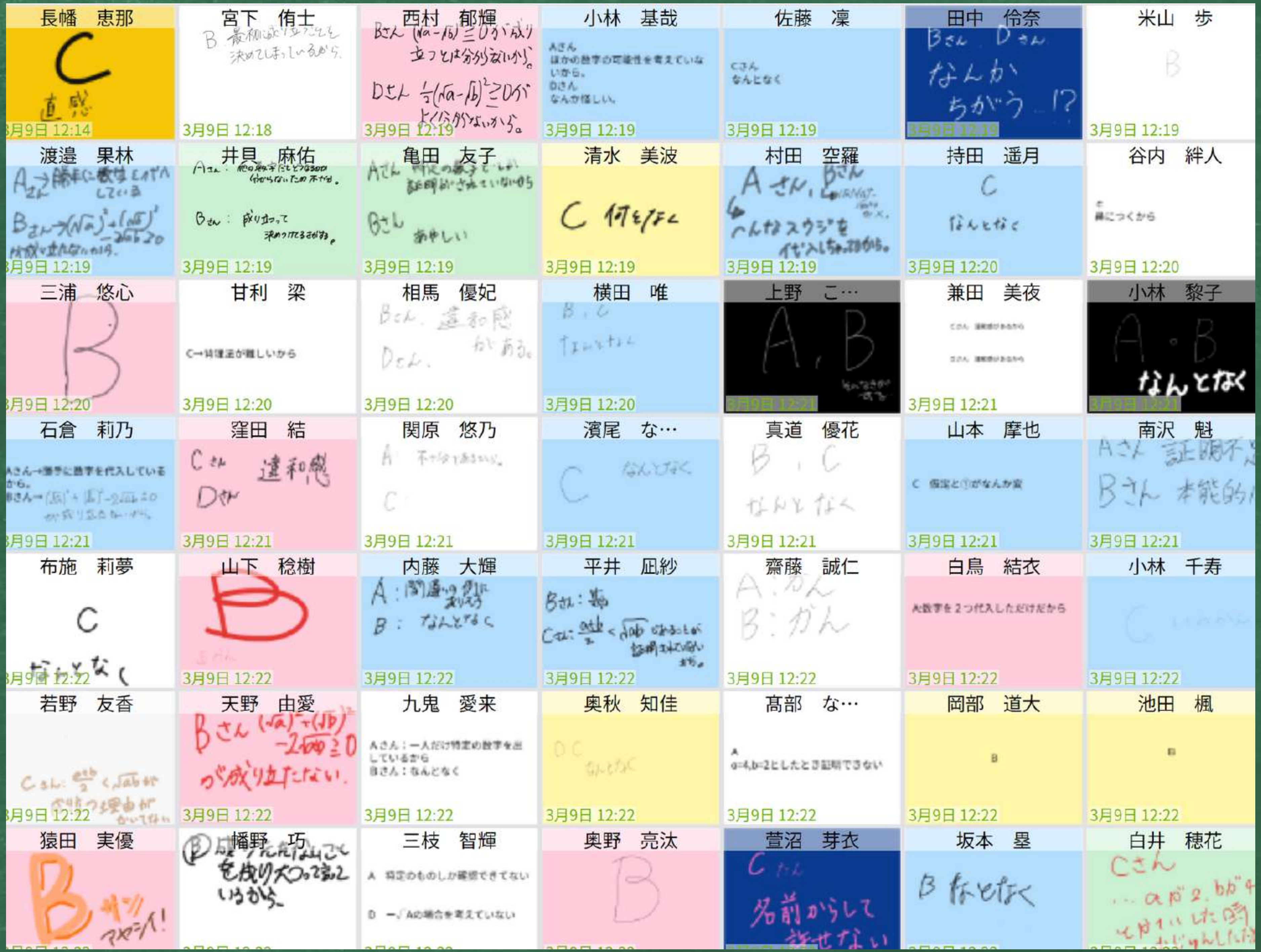
◆等式の両辺に直接代入

◆背理法の誤った使用

◆ChatGPTが作成した証明（予定）

・

・



本日の発表

数学Ⅱ　１章「方程式・式と証明」
不等式の証明
「相加平均と相乗平均」

～背景～

◆直前に数学Ⅰ「データの分析」での学び

◆生徒の証明に対する嫌悪感

◆相乗平均や調和平均の実用性

①相加平均

→データの合計値をデータの個数で割った値

（例）５人の生徒が数学のテストを受験したところ点数は

５０　　６５　　７５　　４０　　７０　（点）

であった。このテストの平均点は？

（解）

$$\frac{50+60+75+40+70}{5}$$

＝６０（点）

②相乗平均

→Ｎ個のデータが比率のとき、Ｎ個の積のＮ乗根で得られる値

（例）ある企業の売り上げが昨年度は１億円から２億円の２倍に、今年度は２億円から１６億円の８倍になった。この２年間で平均何倍か？

（解）$\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$（倍）

③調和平均

→逆数の相加平均の逆数で得られる値（小学校で既習済）

（例）片道１２ｋｍの道のりを行きは時速４ｋｍで歩き、帰りは
時速６ｋｍで走り往復した。平均時速は？

（解）２４÷（３＋２）＝時速４．８ｋｍ

※④加重平均（扱いなし）

→各データに重みをつけて得られる相加平均（統計学で頻出）

（例）あるラーメン屋での３種類のラーメンの価格と１日の注文数は表の通りである。ラーメンの平均単価は？

	価格	注文数
A	６００	３０
B	８００	１５
C	１０００	５

（解）（６００×３０＋８００×１５＋１０００×５）÷（３０＋１５＋５）
＝７００（円）

授業の構成

授業実践日：１月１７日（水）　※４５分×２コマ
対象クラス：SAクラス　理系選択生徒２６名（欠席１名）

（１）　「平均とは？」（１０分）
→相加平均・相乗平均・調和平均の定義と分類

（２）「各平均の関係について」（３５分）
→相加平均と相乗平均・相乗平均と調和平均・相加平均と調和平均の大小関係の考察

（３）「大小関係利用の実例紹介」（３０分）

（４）教科書問題の演習（１５分）

（1）「平均とは？」

＜問題１＞次の①~④の平均xを答えよ。

①同じ道を行きは時速３km，帰りは時速５kmで往復するとき，平均の時速 x km

②濃度が2%の食塩水100gと5%の食塩水200gを混ぜた300gの食塩水の濃度 x %

③ある企業の売り上げ（対前年度比）が，昨年度は１億円から2億円の２倍に，
今年度は2億円から16億円の8倍になったとき，この2年間の平均は x 倍

④ある仕事を終えるのに１日目は８時間，２日目は４時間かかったとき，この
仕事を終えるのかかる１日当たりの平均時間は x 時間

→**相加平均・相乗平均・調和平均の定義と分類**

（２）「各平均の関係について」
～相加平均と相乗平均～

＜問題２＞相加平均と相乗平均の大小関係

a>0，b>0 のとき

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$$

Aさん，Bさん，Cさん，Dさんの４人は次のように証明をした。
４人の証明方法のうち，証明として不十分なものをすべて選び，
その理由を考えよ。
ただし，等号が成り立つ場合についての確認は省略している。

<Aさん>

$a=4$，$b=9$ のとき $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{4+9}{2}=6.5$，$\sqrt{ab}=\sqrt{4\cdot 9}=6$ より $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

$a=2$，$b=2$ のとき $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2+2}{2}=2$，$\sqrt{ab}=\sqrt{2\cdot 2}=2$ より $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

ゆえに，$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ が成り立つ。

<Bさん>

$a>0$，$b>0$ のとき，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$ が成り立つから　$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}\geqq 0$

よって　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

ゆえに，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ が成り立つ。

＜Cさん＞

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立たないと仮定すると，

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \quad \cdots\cdots ①$$ が成り立つ。

$a=1$，$b=1$ とすると，① は $1<1$ となり矛盾するので $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

＜Dさん＞

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

＜問題３＞調和平均と相乗平均の大小関係

＜問題２＞の相加平均と相乗平均の大小関係を用いて，以下の調和平均と相乗平均の大小関係の証明を完成させよ。

（証明）

$a>0$，$b>0$ より $\dfrac{1}{a}>0$，$\dfrac{1}{b}>0$

以下、考えよう！

→問題１と問題２の結果から相加平均と調和平均の大小関係も求められる！

（３）「大小関係利用の実例紹介」

★調和平均と相加平均の大小関係利用

～ドルコスト平均法～

→株式や投資信託といった金融商品を「一定額」ずつ「定期的」に購入すること

例）投資信託を毎月３万円ずつ購入していく

メリット：

価格が安いときにたくさん購入でき、高いときに購入量を抑えることができる

（例題）

ある２か月のシャインマスカット１箱の値段は以下のとおりである。

	７月	８月
１箱当たりの値段	１００００円	８０００円

（ア）毎月１箱ずつ購入したとき

（イ）毎月10000円ずつ購入したとき

（例題）

ある２か月のシャインマスカット１箱の値段は以下のとおりである。

	７月	８月
１箱当たりの値段	a 円	b 円

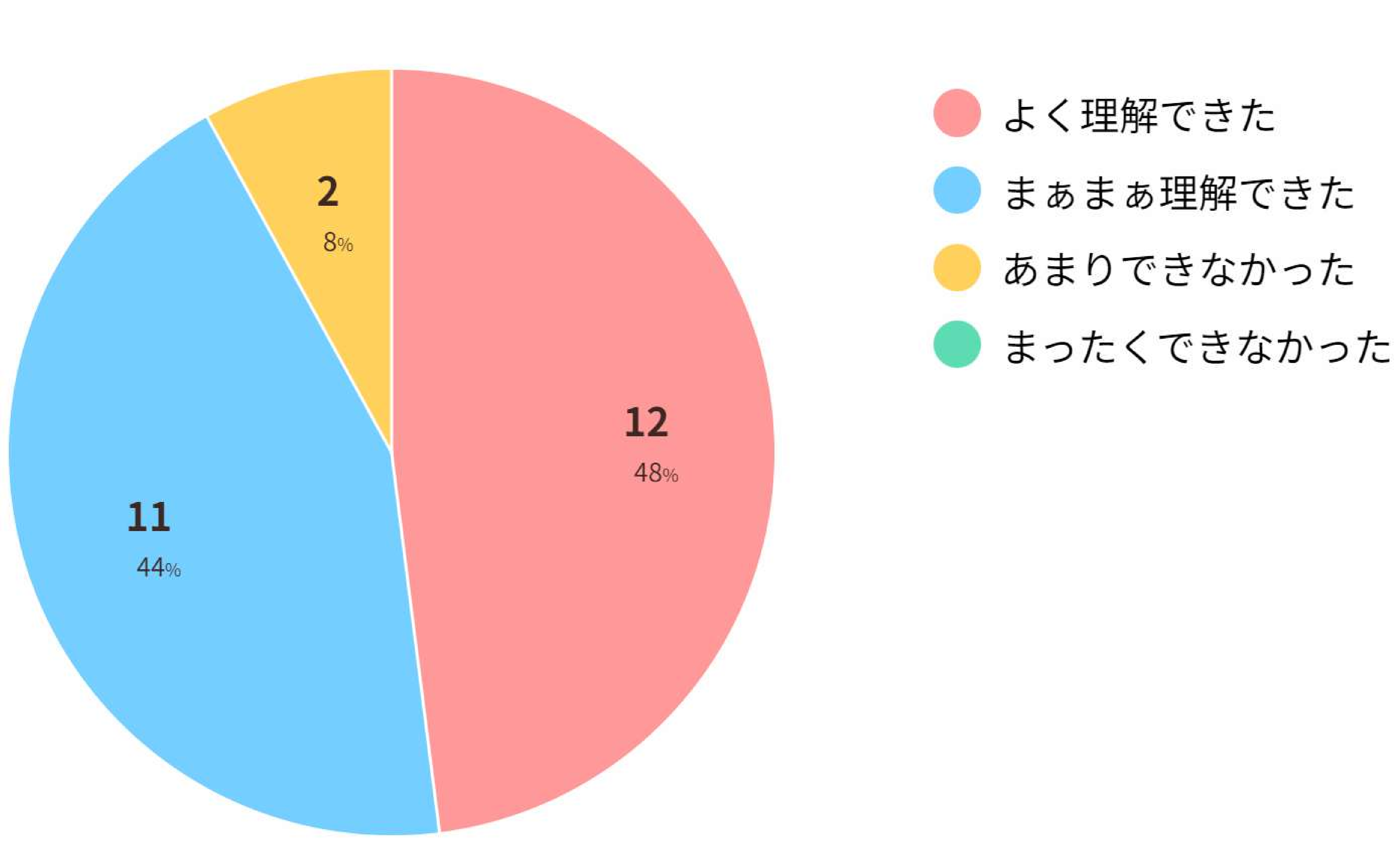
（ア）毎月１箱ずつ購入したとき

（イ）毎月10000円ずつ購入したとき

※（イ）の方が安くなることをこれまでの学習内容から証明してみよう！

アンケート結果

（１）理解度



（２）生徒感想

- 平均にはいろいろな求め方があって普段意識して識別していなかったので面白かった。それぞれには大小関係があってその数式が普段の生活にも役立つことがわかった。

- 足して2で割る平均が一般的でそれしか知らなかったけれど、3種類の平均をを知れて面白かった。またそれぞれの平均に大小関係があってそれらを使ってドルコスト平均法を証明したのも楽しかった。定額払っていたらその値段が安い時にとても損をしそうだけど、そんなことはないということが分かったのでお母さんに教えてあげようと思った。

- 数学が日常に結び付いた実感を感じた。実践的であり楽しい授業だったのでまたやりたい。

- 最初、複数の平均の種類を解いたことのあるような問題で説明されて理解しやすかった。また、大小関係の証明では、身近な事柄で説明されてわかりやすかった。

- 調和平均やドルコスト平均法という言葉を初めて聞いたが、分かりやすかった。よのなか科のような感じで楽しく学ぶことができた。また、ドルコスト平均法というものを調べてみたいと思う。

ご清聴ありがとうございました