

いろいろな平均について ～相加・加重・相乗・調和～



山梨県立都留高等学校
松田 和真



自己紹介

京都府京都市出身

京都教育大学（深尾研究室）



京都教育大学大学院（深尾研究室）



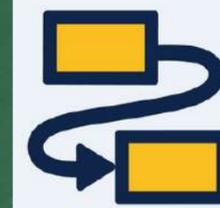
京都府立南陽高等学校（9年間勤務）



山梨県立都留高等学校（2年目）



Apple Teacher



ロイコ認定

Teacher

現勤務校での取り組み①

◆よのなか科

山梨県立都留高等学校
令和の今、必要な教育とは？
 ～よのなか科特別授業2023～



「よのなか科」とは
 よのなか科は藤原和博氏が提唱した、知識と実際の世の中との懸け橋になるアクティブラーニングの授業です。正解がひとつじゃない課題をプレストやディベートを通して、本質的に考えることで「思考力」・「判断力」・「表現力」＝情報編集力を養います。2022年度は山梨県内の教育関係者や複数の中学校、高等学校を対象に研修会や公開授業が実施されました。2023年度は本校専属の講師として、高校2年生の希望生徒を対象に全21回の特別授業が毎月実施されます。すべて公開授業となっており、地元大学の学生、地域社会の方々、企業のビジネスパーソン、保護者、教育委員会や議員など様々な大人と高校生の交流の場となります。

～講師紹介～
藤原 和博 (ふじはら かずひろ)
 東京大学経済学部卒業後、株式会社リクルートに入社。リクルートのトップセールスを経て義務教育初の民間校長として杉並区和田中学校校長を務める。その後、大阪府特別顧問や奈良市立一条高等学校校長等を経て、現在は『よのなか科』の普及と学校を開かれたものにする運動を推進。「教育界のさだまさし」を自認している教育改革実践家。



山梨県立都留高等学校
「よのなか科講座」開講!!
Our Vision ～RARITY～
 地域や社会で求められる希少性の高い人材を目指す



- 6つのマインドセット**
- Repetition：何度でも繰り返し取り組む態度
 - Action：まず行動する態度
 - Revision：常にブラッシュアップする態度
 - Identity：個性を大事にする態度
 - Teamwork：他者と協力・協働する態度
 - Yamanashi：地元山梨を愛する態度

授業コンセプト

<p>キャリア教育</p> <p>地元企業や大学、地域で活躍する起業家による講演や交流を通して、今後の人生において自らの可能性や選択肢に気づき、キャリア形成の基盤づくりを目指す。</p>	<p>アントレプレナーシップ教育</p> <p>職業体験や合宿、地域で活躍する起業家やフリーランスとの交流を通じて、希少性のある自己の確立及び起業家としての視点や思考の育成を目指す。</p>	<p>金融教育</p> <p>人生100年時代におけるお金の知識の必要性を理解するとともに、自らの働き方や生き方を展望し、お金の計画を踏まえた自分の将来設計を行う態度の育成を目指す。</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------

「よのなか科」とは
 よのなか科は山梨県知事特別顧問の藤原和博氏が提唱した、知識と実際の世の中との懸け橋になるアクティブラーニングの授業です。正解がひとつじゃない課題をプレストやディベートを通して、本質的に考えることで「思考力」・「判断力」・「表現力」＝情報編集力を養います。すべて公開授業となっており、地元大学の学生、地域社会の方々、企業のビジネスパーソン、保護者など様々な大人と高校生の交流の場となります。

⚠️ 大人の参加者募集中!!
申込はコチラから→→

〒401-0013
 山梨県大月市大月2丁目11-20
 TEL:0554-22-3125
 担当：松田（総合企画）

現勤務校での取り組み②

◆つる探（探究活動 総合ゼミ）



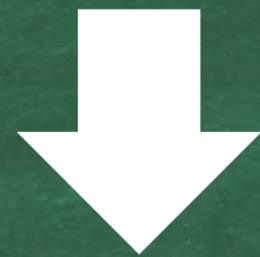


高校数学の指導について



- ◆数学と日常のつながり
- ◆数学の有用性

抽象化していく高校数学の授業でこそ
上記を生徒が実感できるような教材の
作成や実践が必要！あと**タイミング**！



教科書 + α の部分をこまめに入れる



実践例)

①数学B 「数列」 等比数列の和
複利計算

→「単利」と「複利」の比較
それぞれのメリット・デメリット
預金と投資に関する教材

②数学Ⅰ 「データの分析」

→2変数の抽出 BYOD端末の活用

ロイロノート・Excel・Canvaを用いてレポート作成
プレゼン大会



数学教育研究会 2023

金融教育に関する
教材の開発と実践

2023年3月4日

③数学II 「等式・不等式の証明」

→ある証明問題に対して複数の解答を準備

正答・誤答およびその理由を考察し言語化

◆等式の両辺に直接代入

◆背理法の誤った使用

◆ChatGPTが作成した証明 (予定)

-
-



長幡 恵那 C 直感 3月9日 12:14	宮下 侑士 B 最初試したことも決めた手はないから 3月9日 12:18	西村 郁輝 Bさん (a-b) 三つが成り立つとは分らないが Dさん $\frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$ がとくがよいか 3月9日 12:19	小林 基哉 Aさん ほかの数字の可能性を考慮していないから。 Bさん なんか怪しい。 3月9日 12:19	佐藤 凜 Cさん なんとなく 3月9日 12:19	田中 伶奈 Bさん Dさん なんかちがう...? 3月9日 12:19	米山 歩 B 3月9日 12:19
渡邊 果林 Aさん → 数字を代入して Bさん $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = a + b$ 3月9日 12:19	井貝 麻佑 Aさん 数字を代入して Bさん 成り立つ理由がわからないから 3月9日 12:19	亀田 友子 Aさん 数字を代入して Bさん 成り立つ理由がわからないから 3月9日 12:19	清水 美波 C 3月9日 12:19	村田 空羅 Aさん Bさん なんかスラッとした感じがするから 3月9日 12:19	持田 遙月 C なんとなく 3月9日 12:20	谷内 絆人 と違って 3月9日 12:20
三浦 悠心 B 3月9日 12:20	甘利 梁 C → 背理法が難しいから 3月9日 12:20	相馬 優妃 Bさん 違和感 Dさん がある 3月9日 12:20	横田 唯 B, C 3月9日 12:20	上野 こ... A, B 3月9日 12:21	兼田 美夜 Cさん 違和感がある 3月9日 12:21	小林 黎子 A, B なんとなく 3月9日 12:21
石倉 莉乃 Aさん → 数字を代入しているから。 Bさん $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = a + b$ が成り立つから 3月9日 12:21	窪田 結 Cさん 違和感 Dさん 3月9日 12:21	関原 悠乃 Aさん 違和感 Cさん 3月9日 12:21	濱尾 な... C 3月9日 12:21	真道 優花 B, C なんとなく 3月9日 12:21	山本 摩也 C 仮定と①がなんか違う 3月9日 12:21	南沢 魁 Aさん 証明不足 Bさん 本能的 3月9日 12:21
布施 莉夢 C なんとなく 3月9日 12:22	山下 稔樹 B 3月9日 12:22	内藤 大輝 A: 両辺の数字を代入して B: なんとなく 3月9日 12:22	平井 凧紗 Bさん 違和感 Cさん $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ が成り立つから 3月9日 12:22	齋藤 誠仁 Aさん Bさん かん 3月9日 12:22	白鳥 結衣 A数字を2つ代入しただけだから 3月9日 12:22	小林 千寿 C 3月9日 12:22
若野 友香 Cさん $\frac{a}{2} < \sqrt{ab}$ が成り立つ理由がわからないから 3月9日 12:22	天野 由愛 Bさん $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = a + b$ が成り立つから 3月9日 12:22	九鬼 愛来 Aさん → 一人だけ特定の数字を出しているから Bさん: なんとなく 3月9日 12:22	奥秋 知佳 D 3月9日 12:22	高部 な... A $a=4, b=2$ としたとき証明できない 3月9日 12:22	岡部 道大 B 3月9日 12:22	池田 楓 B 3月9日 12:22
猿田 実優 B 3月9日 12:22	橋野 巧 Aさん 数字を代入して Bさん 成り立つ理由がわからないから 3月9日 12:22	三枝 智輝 A 特定のものが証明できていない D - / Aの場合を考慮していない 3月9日 12:22	奥野 亮汰 B 3月9日 12:22	萱沼 芽衣 Cさん 名前からして 3月9日 12:22	坂本 壘 B 3月9日 12:22	白井 穂花 Cさん ... a, b = 2, bb + ... 3月9日 12:22



本日の発表

数学II 1章「方程式・式と証明」
不等式の証明
「相加平均と相乗平均」

～背景～

- ◆直前に数学I「データの分析」での学び
- ◆生徒の証明に対する嫌悪感
- ◆相乗平均や調和平均の実用性

①相加平均

→データの合計値をデータの個数で割った値

(例) 5人の生徒が数学のテストを受験したところ点数は

50 65 75 40 70 (点)

であった。このテストの平均点は？

(解)
$$\frac{50 + 60 + 75 + 40 + 70}{5}$$
$$= 60 \text{ (点)}$$

②相乗平均

→N個のデータが比率のとき、N個の積のN乗根で得られる値

(例) ある企業の売り上げが昨年度は1億円から2億円の2倍に、今年度は2億円から16億円の8倍になった。この2年間で平均何倍か？

$$(解) \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4 \text{ (倍)}$$

③調和平均

→逆数の相加平均の逆数で得られる値（小学校で既習済）

（例）片道12 kmの道のりを行きは時速4 kmで歩き、帰りは時速6 kmで走り往復した。平均時速は？

（解） $24 \div (3 + 2) = \text{時速} 4.8 \text{ km}$

※④加重平均（扱いなし）

→各データに重みをつけて得られる相加平均（統計学で頻出）

（例）あるラーメン屋での3種類のラーメンの価格と1日の注文数は表の通りである。
ラーメンの平均単価は？

	価格	注文数
A	600	30
B	800	15
C	1000	5

（解） $(600 \times 30 + 800 \times 15 + 1000 \times 5) \div (30 + 15 + 5)$
 $= 700$ （円）

授業の構成

授業実践日：1月17日（水） ※45分×2コマ

対象クラス：SAクラス 理系選択生徒26名（欠席1名）

(1) 「平均とは？」（10分）

→相加平均・相乗平均・調和平均の定義と分類

(2) 「各平均の関係について」（35分）

→相加平均と相乗平均・相乗平均と調和平均・相加平均と調和平均
の大小関係の考察

(3) 「大小関係利用の実例紹介」（30分）

(4) 教科書問題の演習（15分）

(1) 「平均とは？」

＜問題1＞ 次の①～④の平均 x を答えよ。

① 同じ道を行きは時速3 km, 帰りは時速5 kmで往復するとき, 平均の時速 x km

② 濃度が2%の食塩水100gと5%の食塩水200gを混ぜた300gの食塩水の濃度 x %

③ ある企業の売り上げ（対前年度比）が, 昨年度は1億円から2億円の2倍に, 今年度は2億円から16億円の8倍になったとき, この2年間の平均は x 倍

④ ある仕事を終えるのに1日目は8時間, 2日目は4時間かかったとき, この仕事を終えるのかかる1日当たりの平均時間は x 時間

→ 相加平均・相乗平均・調和平均の定義と分類

(2) 「各平均の関係について」

～相加平均と相乗平均～

<問題2> **相加平均と相乗平均の大小関係**

$a > 0, b > 0$ のとき


$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Aさん, Bさん, Cさん, Dさんの4人は次のように証明をした。

4人の証明方法のうち, 証明として不十分なものをすべて選び, その理由を考えよ。

ただし, 等号が成り立つ場合についての確認は省略している。

<Aさん>

$$a=4, b=9 \text{ のとき } \frac{a+b}{2} = \frac{4+9}{2} = 6.5, \sqrt{ab} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ より } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$a=2, b=2 \text{ のとき } \frac{a+b}{2} = \frac{2+2}{2} = 2, \sqrt{ab} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2 \text{ より } \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$$

ゆえに, $a > 0, b > 0$ のとき, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

<Bさん>

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき, } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ が成り立つから } (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\text{よって } a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

ゆえに, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

<Cさん>

$a > 0, b > 0$ のとき, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立たないと仮定すると,

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \dots\dots \textcircled{1} \text{ が成り立つ。}$$

$a=1, b=1$ とすると, $\textcircled{1}$ は $1 < 1$ となり矛盾するので $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

<Dさん>

$$\begin{aligned} a > 0, b > 0 \text{ のとき} \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ゆえに, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

<問題3> **調和平均と相乗平均**の大小関係

<問題2>の相加平均と相乗平均の大小関係を用いて、以下の調和平均と相乗平均の大小関係の証明を完成させよ。

(証明)

$$a > 0, b > 0 \text{ より } \frac{1}{a} > 0, \frac{1}{b} > 0$$

以下、考えよう！

→問題1と問題2の結果から**相加平均と調和平均の大小関係**も求められる！

(3) 「大小関係利用の実例紹介」

★調和平均と相加平均の大小関係利用

～ドルコスト平均法～

→株式や投資信託といった金融商品を「**一定額**」ずつ「**定期的**」に購入すること

例) 投資信託を**毎月3万円**ずつ購入していく

メリット:

価格が安いときにたくさん購入でき、高いときに購入量を抑えることができる



(例題)

ある2か月のシャインマスカット1箱の値段は以下のとおりである。

	7月	8月
1箱当たりの値段	10000円	8000円

(ア) 毎月1箱ずつ購入したとき

(イ) 毎月10000円ずつ購入したとき

(例題)

ある2か月のシャインマスカット1箱の値段は以下のとおりである。

	7月	8月
1箱当たりの値段	a 円	b 円

(ア) 毎月1箱ずつ購入したとき

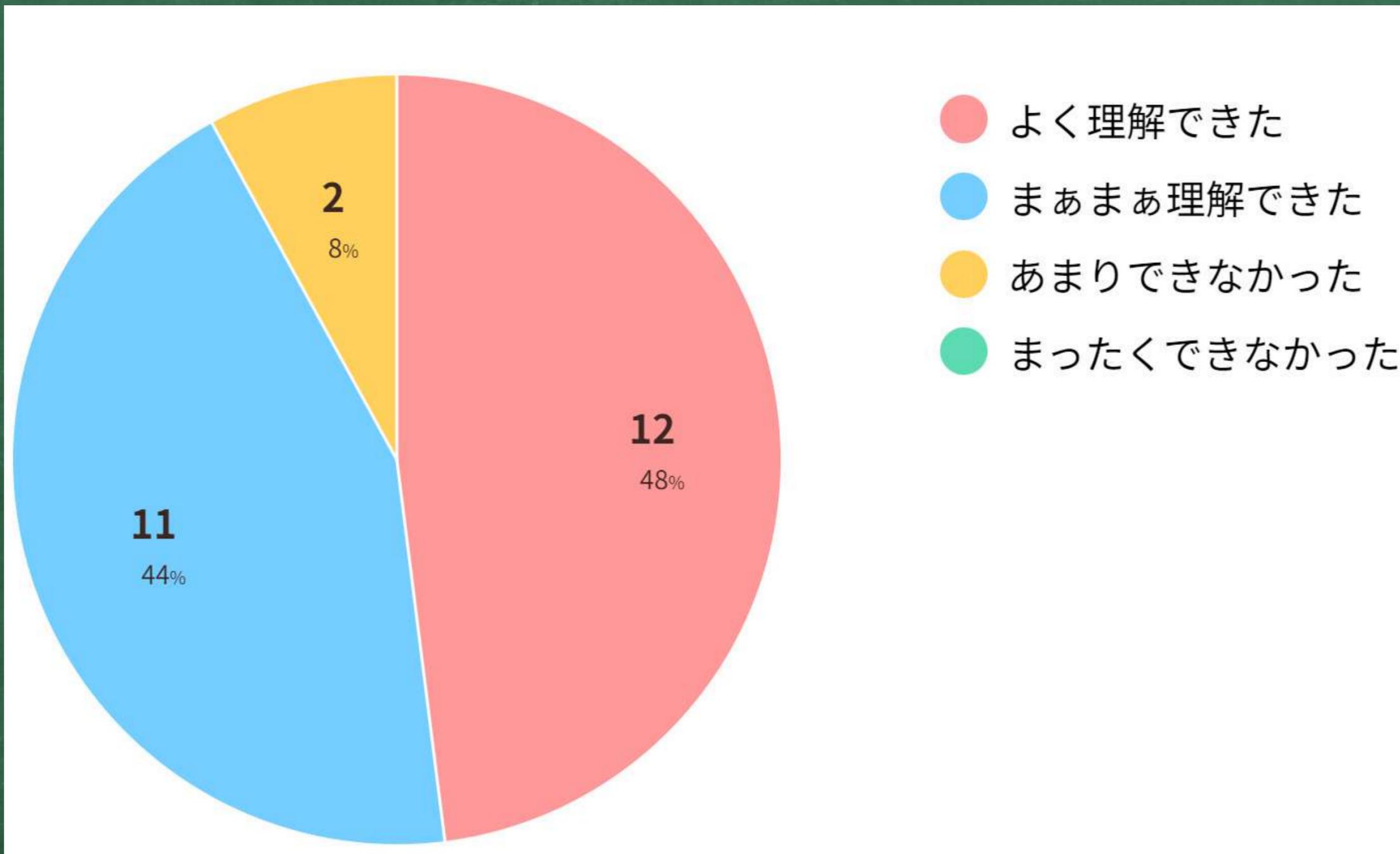
(イ) 毎月10000円ずつ購入したとき

※ (イ) の方が安くなることをこれまでの学習内容から証明してみよう!



アンケート結果

(1) 理解度



(2) 生徒感想

- 平均にはいろいろな求め方があって普段意識して識別していなかったのが面白かった。それぞれには大小関係があってその数式が普段の生活にも役立つことがわかった。
- 足して2で割る平均が一般的でそれしか知らなかったけれど、3種類の平均を知れて面白かった。またそれぞれの平均に大小関係があってそれらを使ってドルコスト平均法を証明したのも楽しかった。定額払っていたらその値段が安い時にとっても損をしそうだけど、そんなことはないということが分かったのでお母さんに教えてあげようと思った。

- **数学が日常に結び付いた実感を感じた。** 実践的であり楽しい授業だったのでまたやりたい。
- **最初、複数の平均の種類を解いたことのあるような問題で説明されて理解しやすかった。** また、大小関係の証明では、身近な事柄で説明されてわかりやすかった。
- **調和平均やドルコスト平均法という言葉は初めて聞いたが、分かりやすかった。** **よのなか科のような感じで楽しく学ぶことができた。** また、ドルコスト平均法というものを調べてみたいと思う。

ご清聴ありがとうございました

