2025.02.02　第25回これからの算数・数学教育を考える会

量を核にした関数指導

―量の視覚化と小・中・高の接続を重視した授業実践―

津市立橋北中学校（三重大学教職大学院）

柴原　大樹

もくじ

もくじ

1．問題の所在

- 中学生の関数に対する苦手意識

⇒具体的なイメージが持てない

- 全国学力学習状況調査の中学校数学

（**H19～H27**）言葉で表された式の特徴から数学的な意味を考え、事象を式の意味に即して解釈することに課題がある

（**H28～**）事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することに課題がある

（国立教育政策研究所,**2007～2024**）

現在の関数教育の問題点

①関数教材と解析幾何教材が混在し・教師がそれらを混同していること

②関数教材に対する量的な捉えが不十分であること

③小・中・高等学校の接続に配慮した系統的な関数指導が欠如していること

1. 問題の所在

もくじ

特に課題①②を解決するために、具体的事象から“量”を取り出して考察する

↓

学習者の関数概念の理解につながる

2. 方針

もくじ

（1）量について

（2）関数のグラフについて

（3）正比例関数について

3．量と正比例関数

(1) 量について

- 量とは何か

物体のもつ1つの側面として現れる。（水　⇒　1L、1000㎤、18℃・・・）

「質」（美しい、おいしそう、・・・）とは異なる。

量
- 分離量（とびとびに得られる値、<u>数える</u>　⇒　自然数）
- 連続量（ずーっと連なって得られる値、<u>測る</u>　⇒　実数）

量は自然数か実数によって数値化される

3. 量と正比例関数

(1) 量について

- 量の測定

量

分離量（<u>数える</u>　⇒　自然数）

※基数的目盛

連続量（<u>測る</u>　⇒　実数）

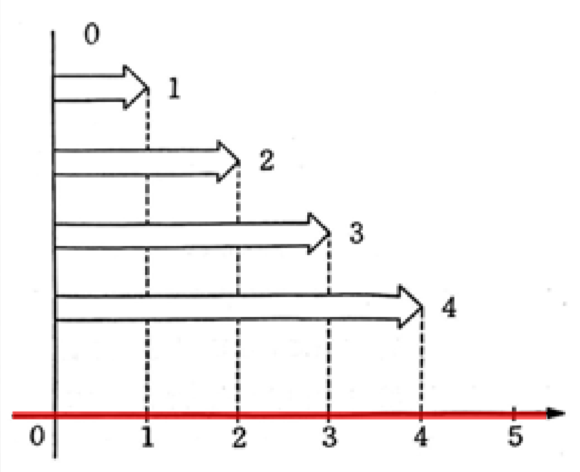
※序数的目盛

(1) 量について

- 量の線分化

序数的目盛の背景には、連続量の系列化がある。

小さい方から順に並べて、1本の軸のうえに投影する。



すべての連続量は、単位を決めれば1本の数直線上に

目盛ることができる。**<u>これを、量の線分化とよぶ。</u>**

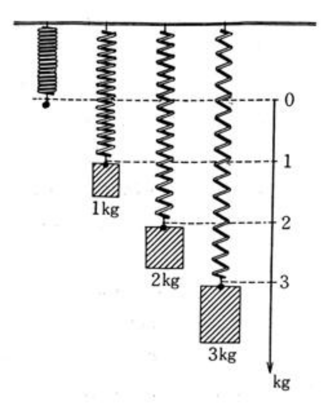
あらゆる計器の根本原理となっているので、小学校低学年から身近に触れる機会がある。

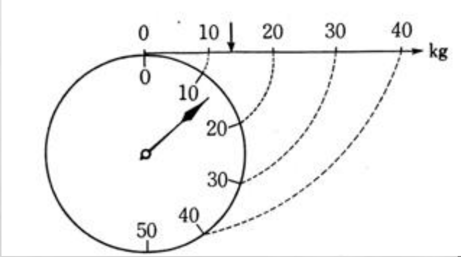
3. 量と正比例関数

(1) 量について

- 量を空間化して表現する(シェーマ)

量 { 分離量(自然数) ⇒ タイル、ブロック
　　 連続量(実数) ⇒ 線分、テープ





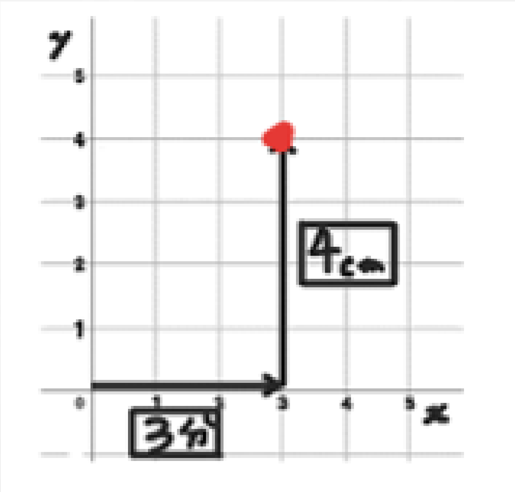
3. 量と正比例関数

(1) 量について

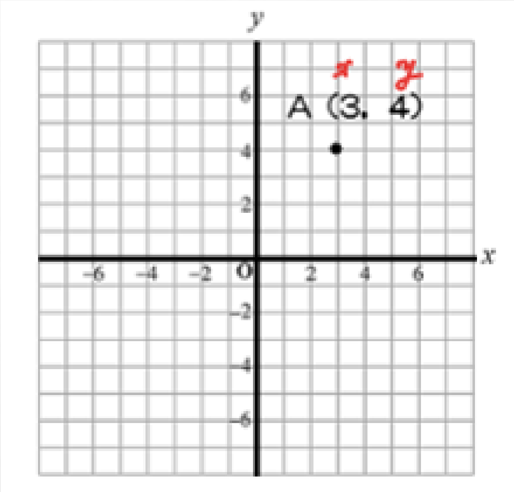
- 関数領域では、事象から、例えば「時間」や「長さ」などの連続量を抽出することが重要

⇒抽出した量を線分で表すことで

視覚的に二つの変量を捉える



量を線分化した表記



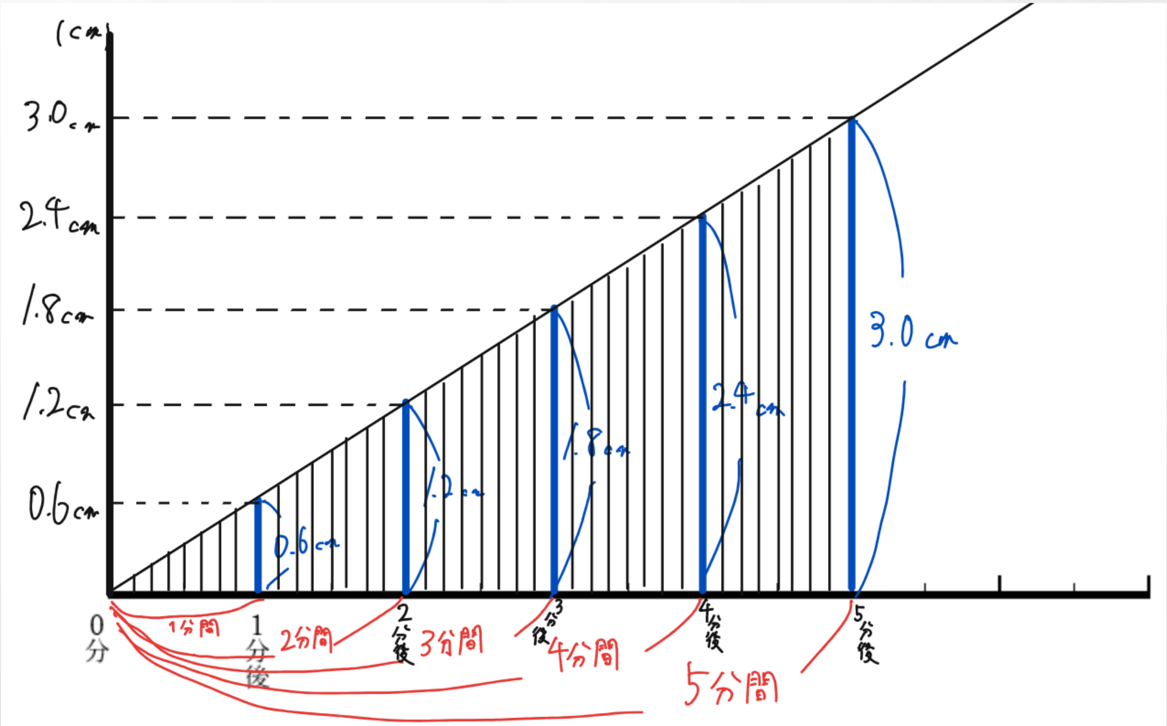
解析幾何としての座標

3. 量と正比例関数

(2) 関数のグラフ

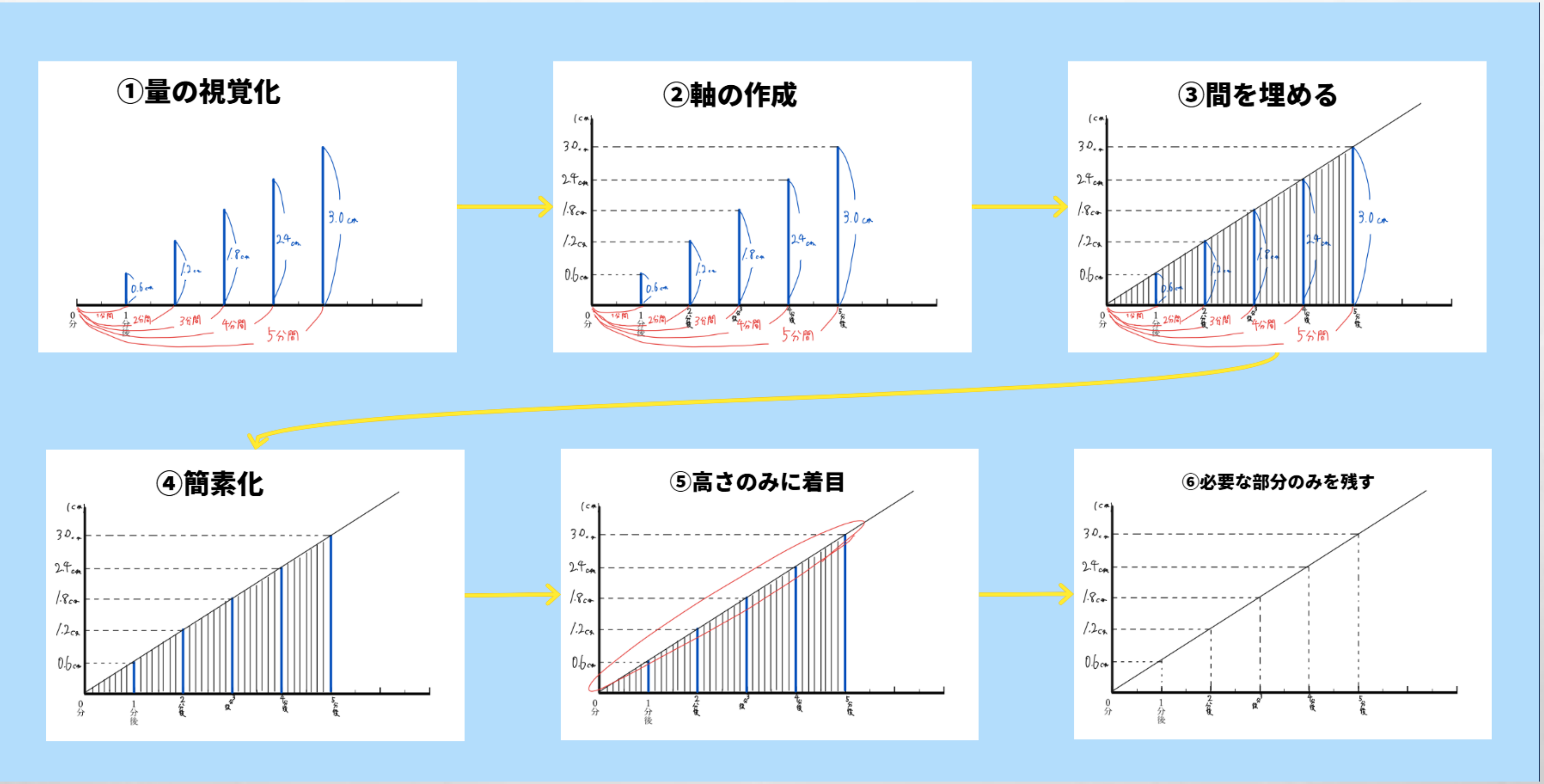
- 事象の変化を座標を用いて位置として図示するのではなく、線分を用いて対応関係を表す必要がある

- 抽出した量を、線分を用いて表すことが、学習者の量に対する正しい認識を促し、事象の変化を捉えて関数概念の理解に至る効果的なシェーマになる



3. 量と正比例関数

(2) 関数のグラフ



3. 量と正比例関数

（3）正比例関数

比例 ⇒
- 正比例（小学校第5学年で、静的な倍々関係にあたる正比例を学習する）
- 反比例
- 複比例
- など

(3) 正比例関数

- 小学校第6学年で学習する「伴って変わる二つの数量の関係」

  ⇒事象の<u>動的な変化</u>を対象とする関数

  ⇒「正比例関数」と呼ぶ。

- その後の一次関数、二次関数、微積分につながる

<u>中学校1年生で学習する正比例関数は、</u>

<u>その後の関数教育の系統性を構築するうえで重要な役割を果たす</u>

3. 量と正比例関数

以上より、関数教育の要点をまとめる

（ア） 具体的事象をもとに数量関係を考察する

（イ） 変量を抽出し、表･式･グラフを関連付ける

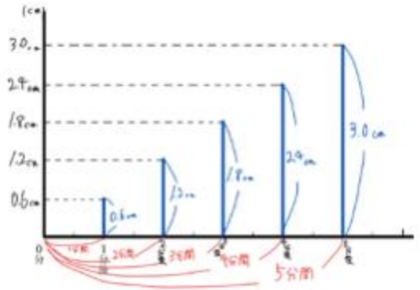
（ウ） 正比例関数を関数指導の軸に据える

3．量と正比例関数

もくじ

【小学校第6学年　正比例関数のグラフ】

- 点滴器を用いて実験を行い、経過時間に対する溜まった水の量を線分で表し関数のグラフを作成する。
- 二つの変量の関係を表すグラフをかくことと、読み取ることに関する問題に取り組む。
- 静的な比の関係ではなく、動的な正比例関数として理解することをねらいとする。



4. 実践（小学校６年生）

関数のグラフ　指導計画

【第1時】 点滴器を用いた教具により、メモリ付き容器に一定ペースで水を溜める実験を行う。
1分ごとの溜まった水の量を線分によって視覚化し、関数のグラフを作成する。

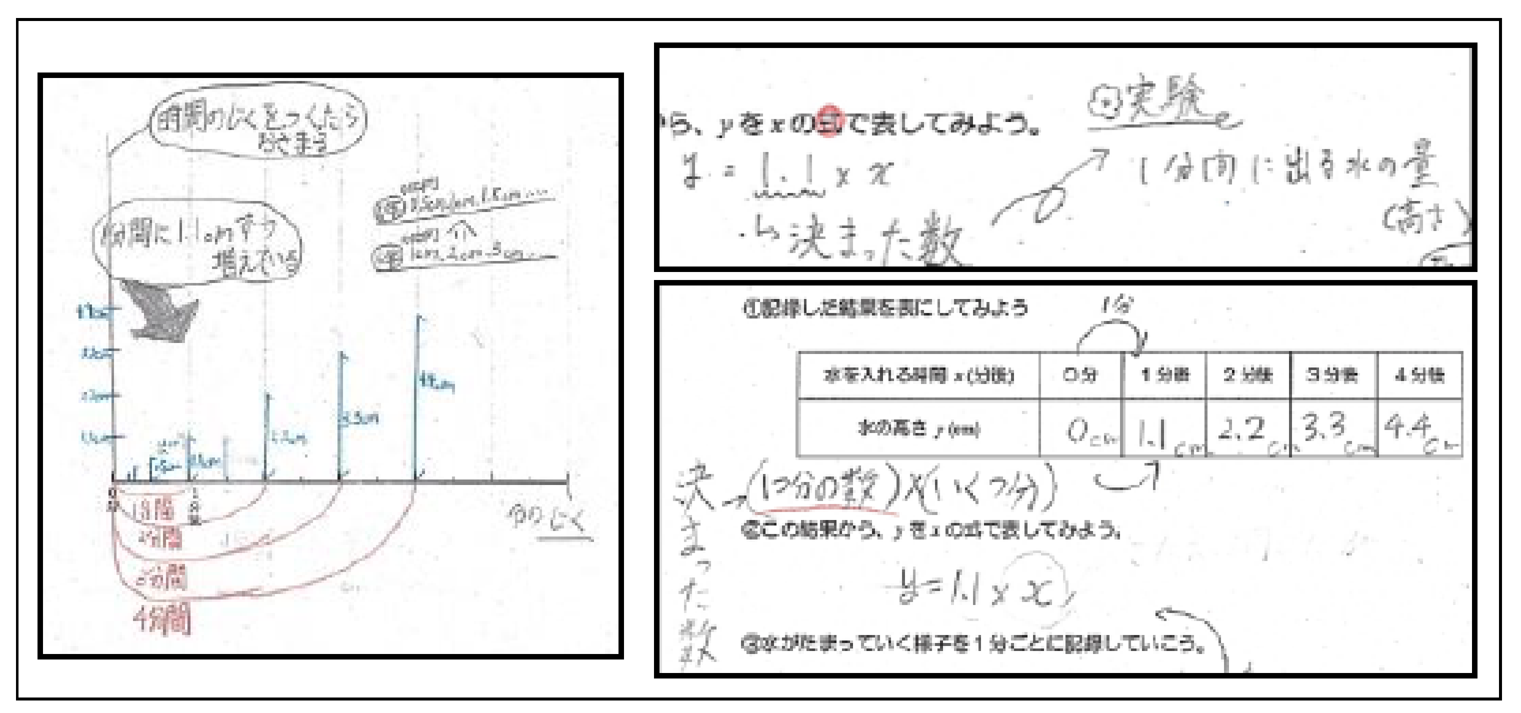
【第2時】 第1時のグラフを細かく考察し、線分の上端を結んで直線のグラフを作成する。
その後、作成したグラフについて、あるXに対するYの値を求める問題に取り組む。

【第3時】 物体が動く場面を想定してグラフをかき、そこからXとYの関係を読み取る。

【第4時】 速さに関する二つのグラフを比較し、それらを利用して課題解決を行う。
解を求めた後、グラフの読み取り方法を説明する活動を行う。

4．実践（小学校6年生）

第1時

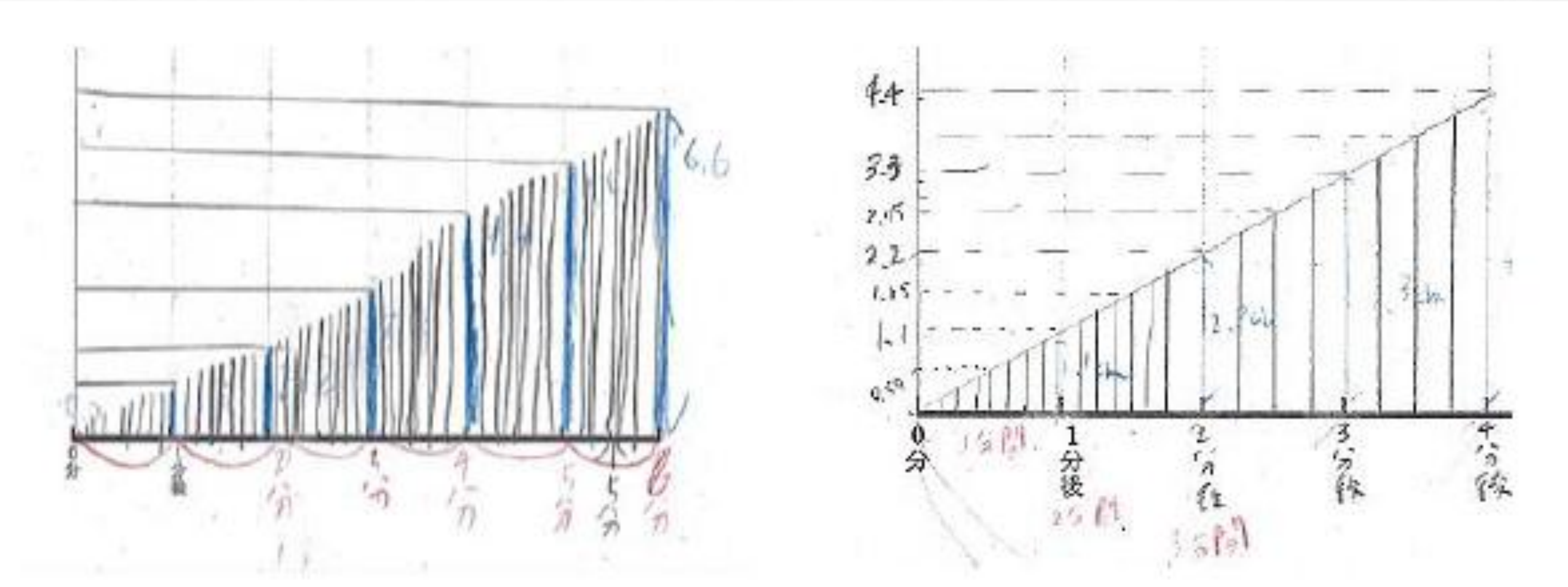


実験から、時間の変化に伴って溜まった水の量を線分化して表・式・グラフで表す

「決まった数」の意味が分かり、表・式・グラフから事象との関連を理解

4. 実践（小学校6年生）

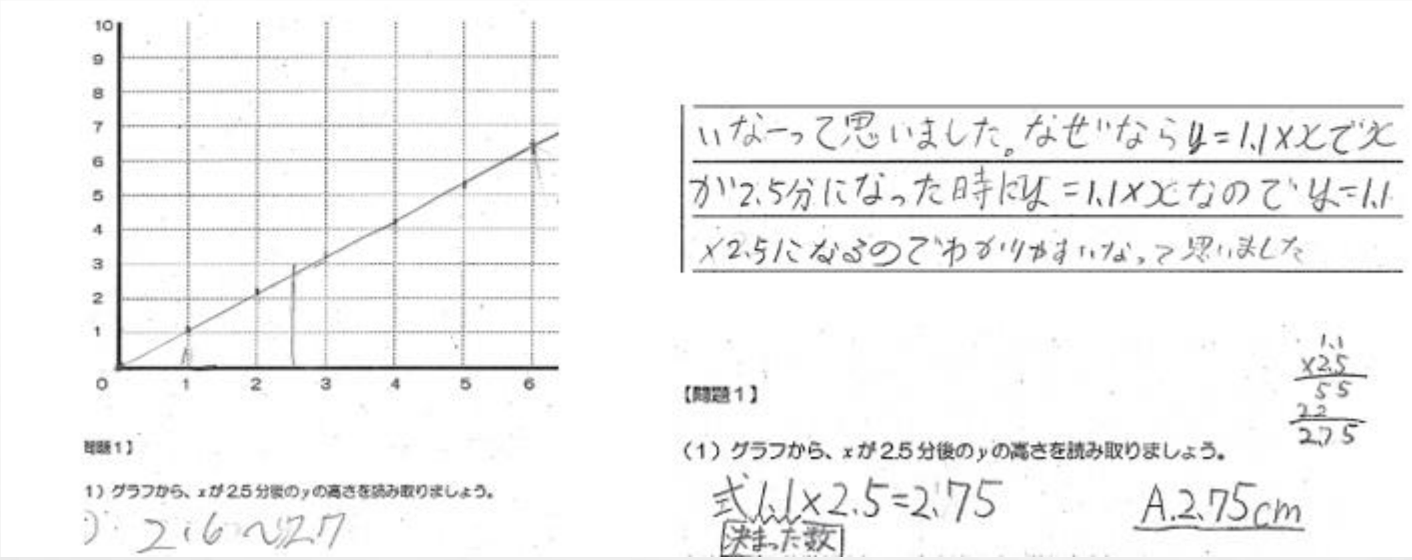
第2時



時間の変化に対する溜まった水が動的に変化していることが理解できた。また、その間を線分で埋めていくことで、一定間隔で変化していることが分かり、グラフが直線になることを理解した。

4. 実践（小学校６年生）

第2時



　グラフのxに対応する線分の長さを測る姿が見られた。
　対応する値を、線分を通して量的に捉えている

　決まった数にxの値をかけてyの値を求める姿もあった。
　式表現から独立変数と従属変数の関係を理解している

4．実践（小学校6年生）

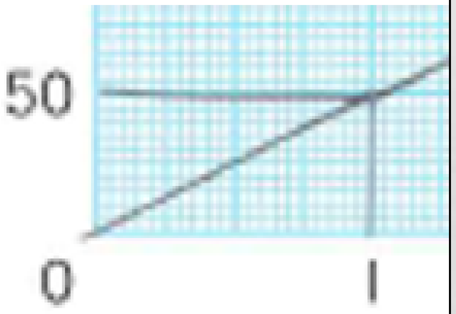
第3時

与えられた表から、
式とグラフを作成した

問題
次のフェリーは時速50kmの速さで進みます。
下の表は、フェリーの進む時間と道のりの関係を表したもので、道のり y kmは時間 x 時間に比例します。

時間 x (時間)	1	2	3	4	5	6
道のり y (km)	50	100	150	200	250	300

①y を x の式で表しましょう。
②x と y の比例の関係をグラフで表しましょう。
③出発してから1時間30分で、何km進みますか。
また、フェリーが125km進むのに、何時間何分かかりますか。



決まった数である50が表・式・グラフのそれぞれから読み取れることを確認し、
「時速50kmの速さで進む」という事象の特徴について理解を深めることができた

4．実践（小学校6年生）

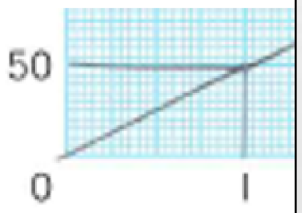
第3時

【出発してから1時間30分で
何km進むかを求める問題】

問題
次のフェリーは時速50kmの速さで進みます。
下の表は、フェリーの進む時間と道のりの関係を表したもので、道のりykmは時間x時間に比例します。

時間　x(時間)	1	2	3	4	5	6
道のり　y(km)	50	100	150	200	250	300

①yをxの式で表しましょう。
②xとyの比例の関係をグラフで表しましょう。
③出発してから1時間30分で、何km進みますか。
また、フェリーが125km進むのに、何時間何分かかりますか。

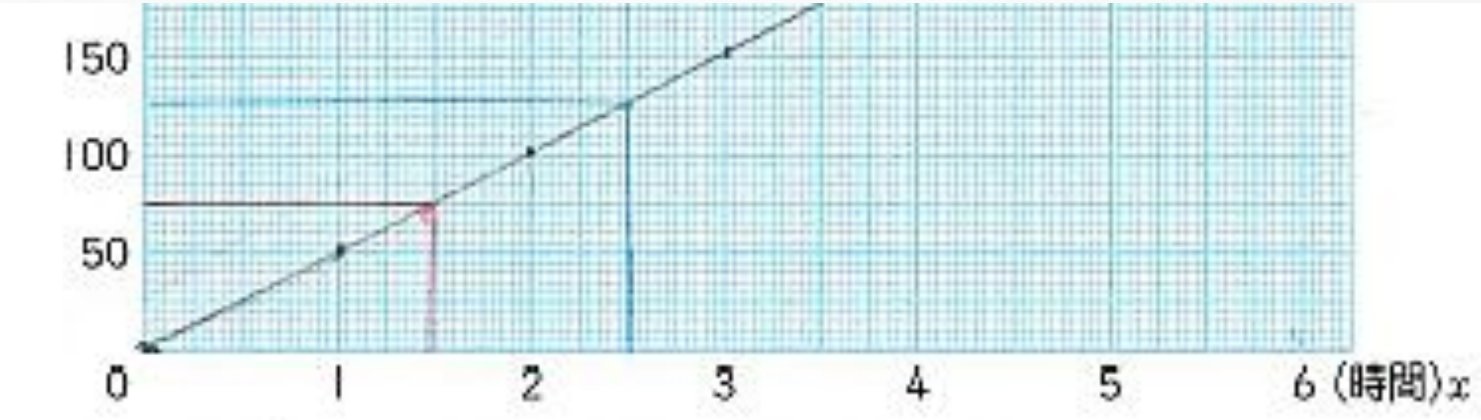


・児童の約半数が、「1時間で50kmだから、30分なら25km進むことになる。だから50と25を足して75kmになる。」とした。
これは、比例の線形性の「和の保存」であり、比の本質を捉えた重要な考え方だと言える。

・残りの約半数は「50×1.5=75」と立式しており、正比例関数の式表現は身に付いている。

4．実践（小学校6年生）

第3時



【出発してから1時間30分で何km進むかを求める問題】

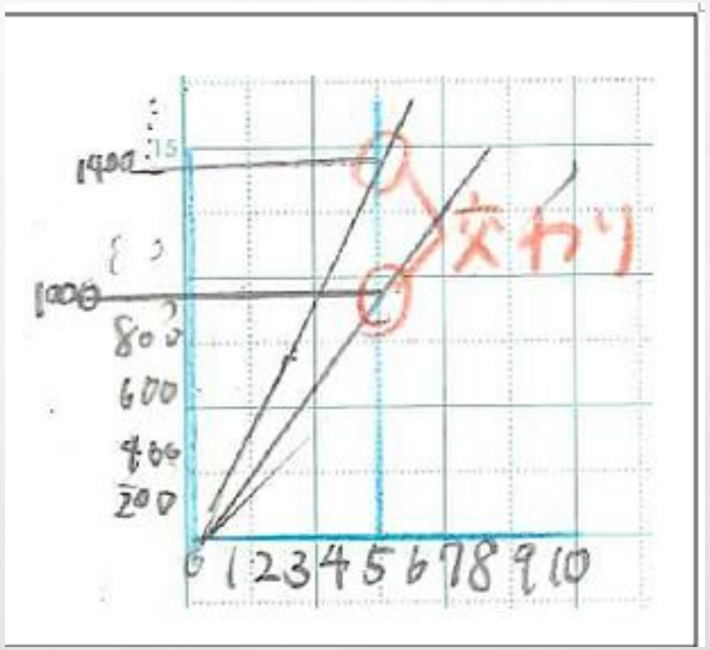
グラフで問題を解決した児童は2名しかいなかった

教師がグラフの描き方を説明するだけでは、
児童がグラフを読み取って事象を解釈する発想には至らない

4．実践（小学校６年生）

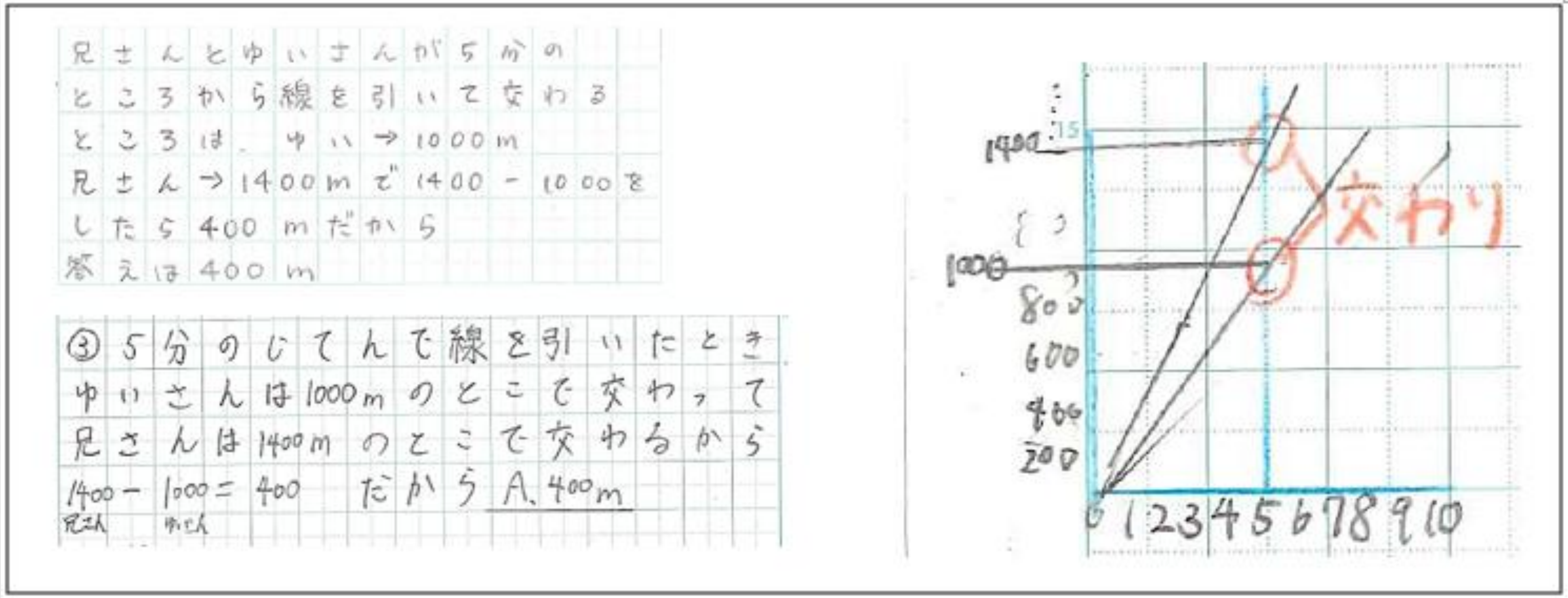
第4時

　二本のグラフにおける、xに対応するyの値の差を考える場合にも、線分を活用することで視覚的に量を捉えることができた。



4．実践（小学校6年生）

第4時



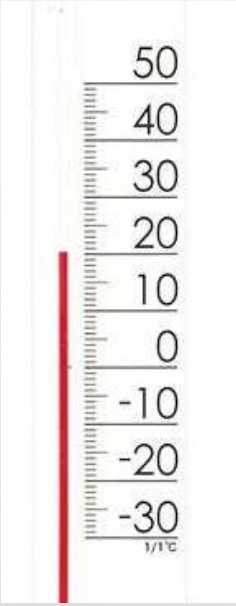
「事象・量・グラフ」の関係性に着目させ、グラフが何を表すかを考えることで、児童は正確なグラフの読み取り方を身に付けることができた

4. 実践（小学校6年生）

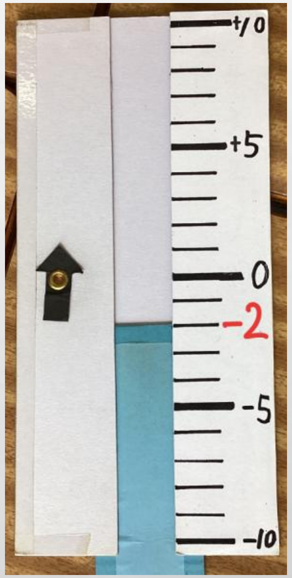
もくじ

中学校1年生　正比例関数（構想）

メモリを温度計のように配置
真ん中に0をおいて
時間経過をさかのぼることで
負の数を考察



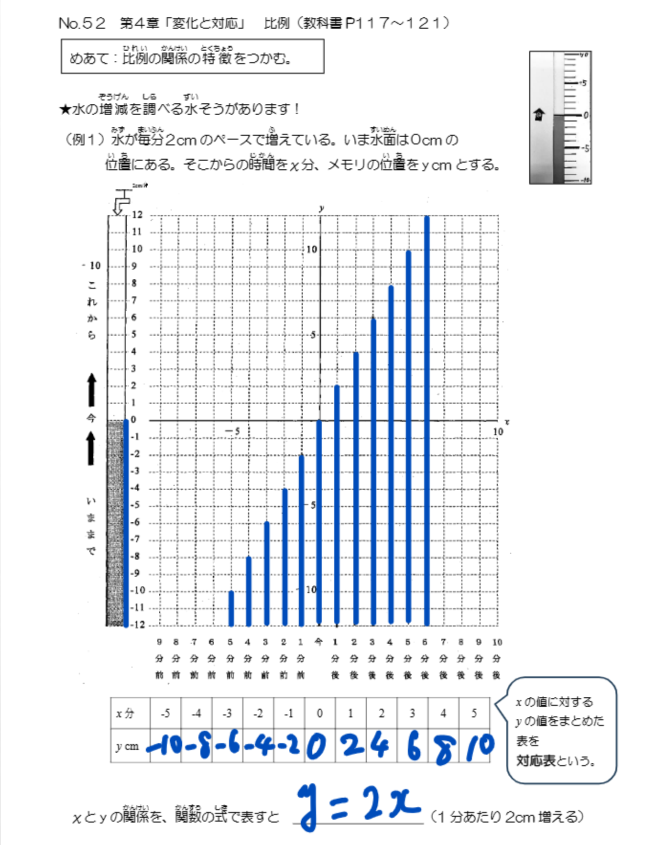
教具を用いて操作し、
事象と表・式・グラフを
関連付ける



5. 実践（中学校）

中学校1年生　正比例関数（これ以降は実践）

比例定数が　正



No.52　第4章「変化と対応」　比例（教科書P117～121）

めあて：比例の関係の特徴をつかむ。

★水の増減を調べる水そうがあります！

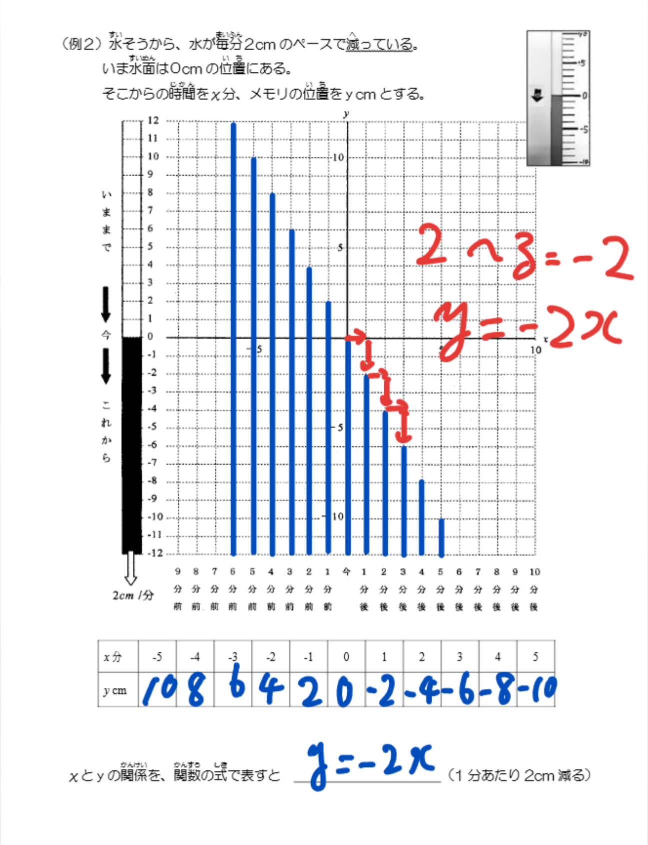
（例1）水が毎分2cmのペースで増えている。いま水面は0cmの位置にある。そこからの時間をx分、メモリの位置をycmとする。

x分	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y cm	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10

xの値に対するyの値をまとめた表を対応表という。

xとyの関係を、関数の式で表すと $y=2x$（1分あたり2cm増える）

比例定数が　負



（例2）水そうから、水が毎分2cmのペースで減っている。
いま水面は0cmの位置にある。
そこからの時間をx分、メモリの位置をycmとする。

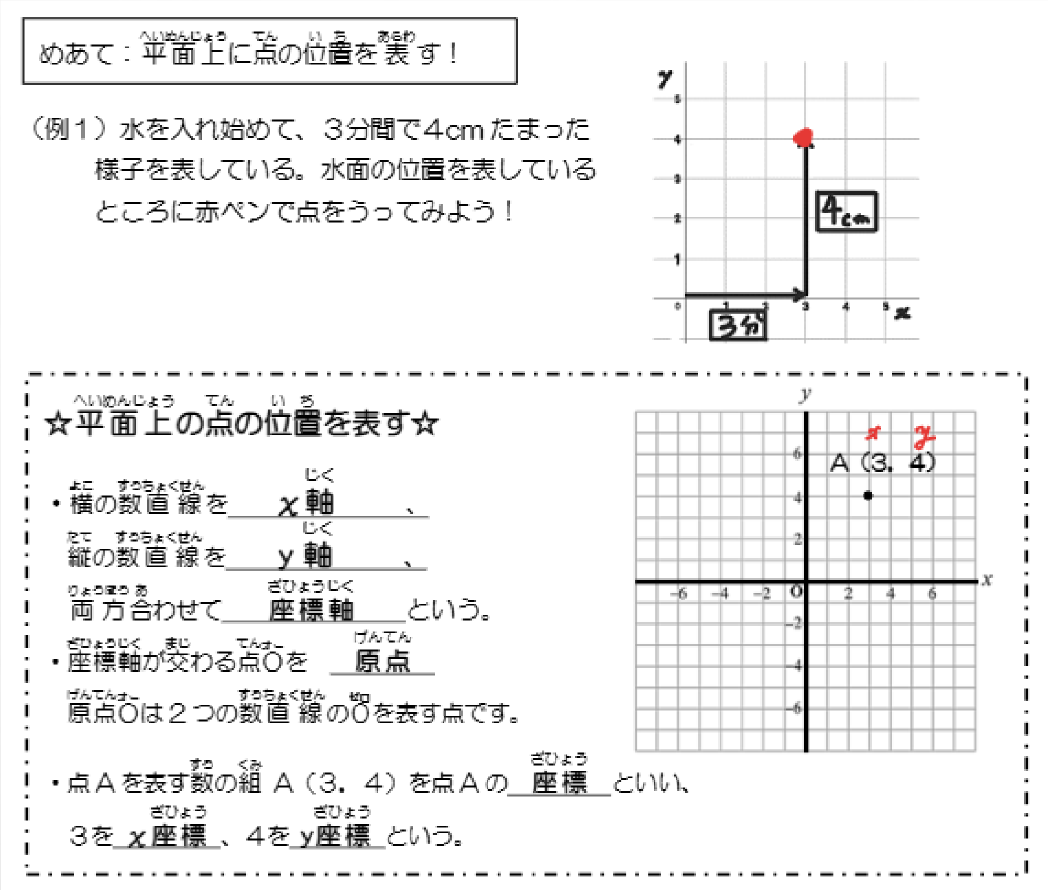
$y=-2x$

x分	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y cm	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10

xとyの関係を、関数の式で表すと $y=-2x$（1分あたり2cm減る）

5. 実践（中学校）

中学校1年生　正比例関数


めあて：平面上に点の位置を表す！

（例１）水を入れ始めて、３分間で４cm たまった様子を表している。水面の位置を表しているところに赤ペンで点をうってみよう！

☆平面上の点の位置を表す☆

・横の数直線を x軸 、
縦の数直線を y軸 、
両方合わせて 座標軸 という。

・座標軸が交わる点Ｏを 原点
原点Ｏは２つの数直線の０を表す点です。

・点Ａを表す数の組 Ａ（３，４）を点Ａの 座標 といい、
３を x座標 、４を y座標 という。

座標の扱い方

量の変化を表す点
⇒関数

位置を表す
⇒解析幾何

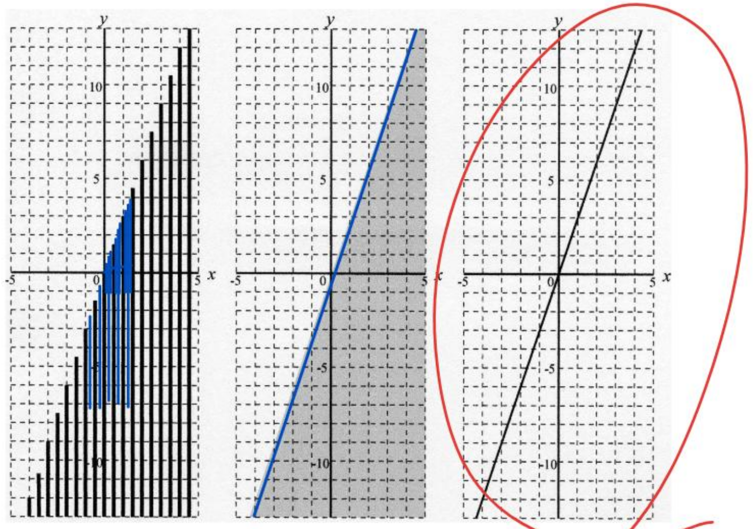
5．実践（中学校）

中学校1年生　正比例関数

めあて：比例の関係 $y=ax$ のグラフが書ける！

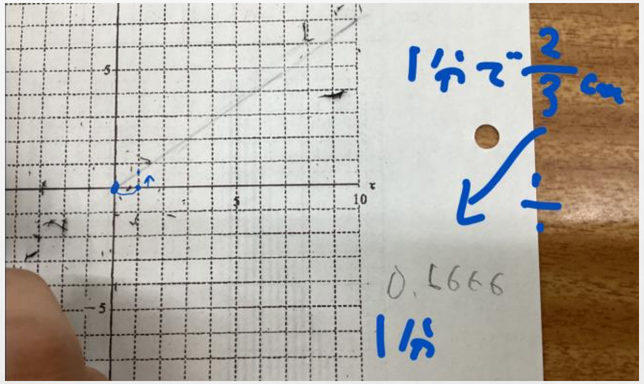
（例１）水そうの装置で『$y=3x$』を考える。１分ごとの変化は次のようになります。
0.5 分ごとの変化を考えて、対応する x，y の表を埋めなさい。

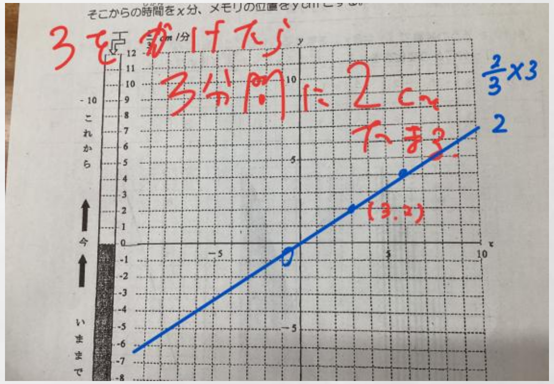
x 分	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y cm	−9	-7.5	−6	-4.5	−3	-1.5	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9



（0.5 分ごと）　（もっとこまかく）　（水面の位置だけ）

比例定数が分数の場合
（$\frac{2}{3}$cm/分）





5. 実践（中学校）

中学校2年生　一次関数

“時間経過”に対する“水の量”の変化に関して

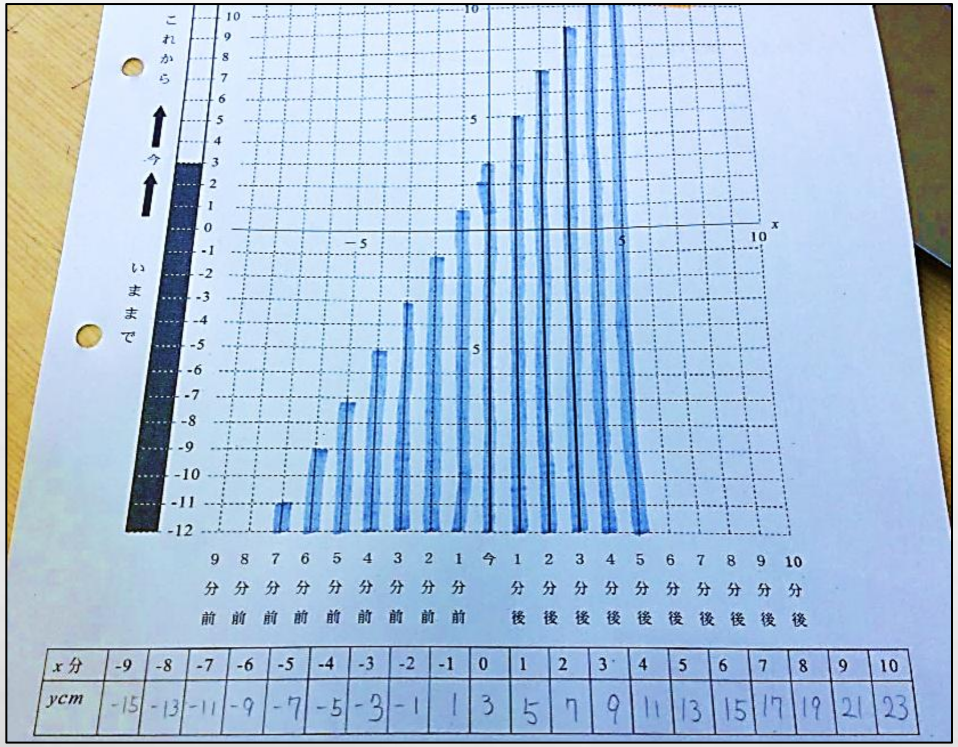
「今現在の位置」と「毎分○CMで増える(減る)」

（初期値）　　　　　　　　（変化の割合）

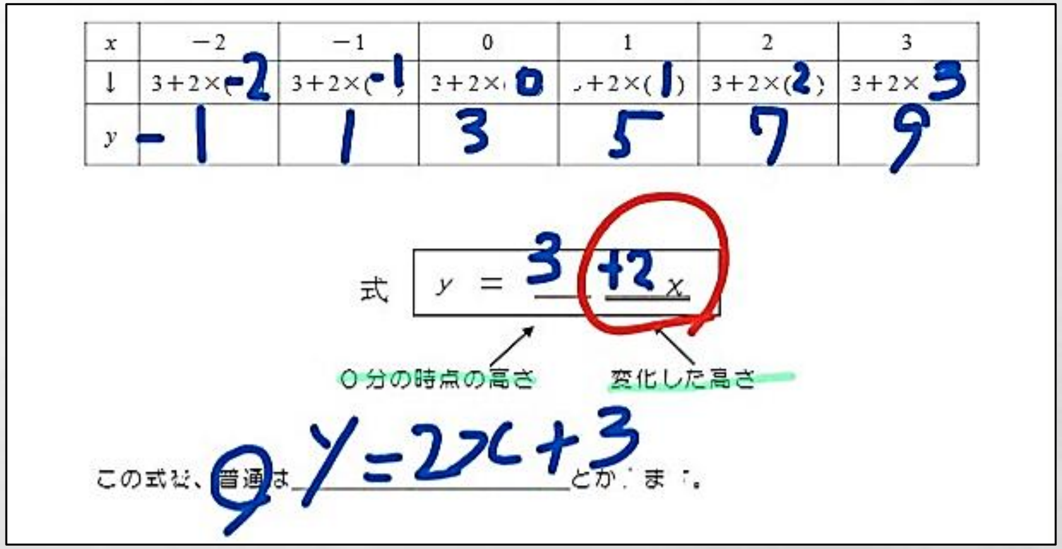
という2つの情報に着目させて関数のグラフを作る

5. 実践(中学校)

グラフ



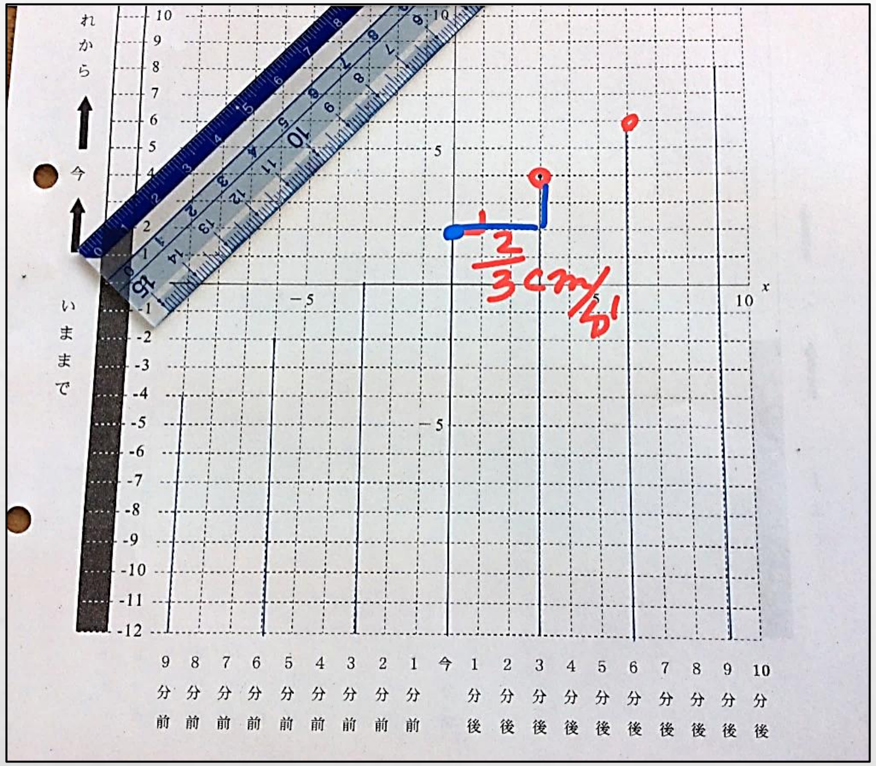
表



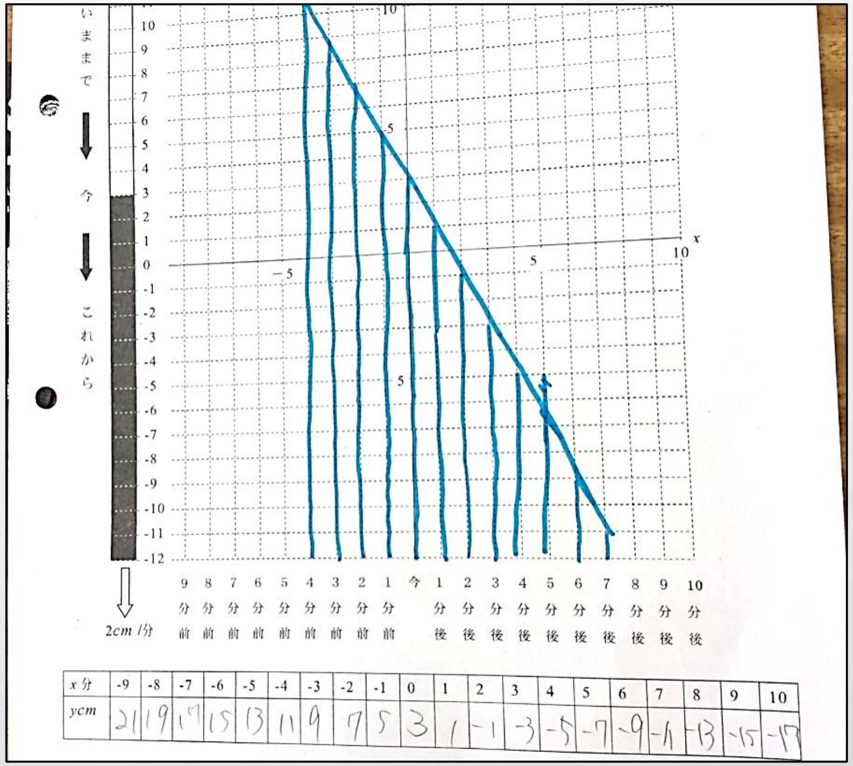
式

5．実践（中学校）

変化の割合が分数



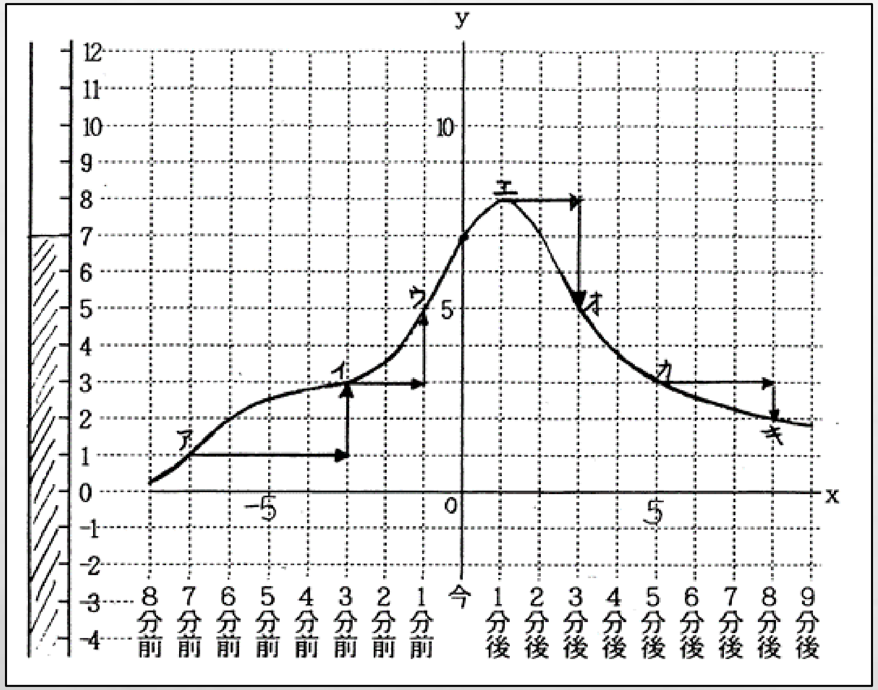
変化の割合が負の数



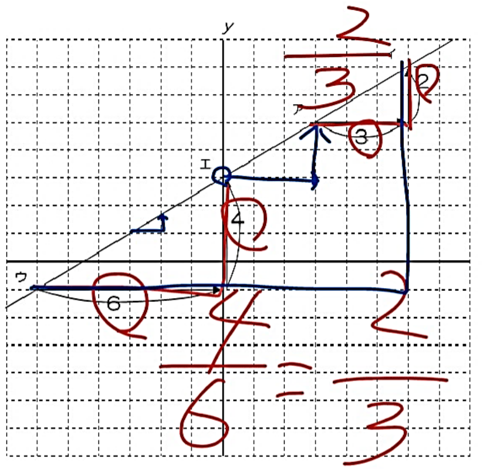
5. 実践(中学校)

変化の割合

ランダムな増減のグラフ



一次関数のグラフ



★問題４について

・（ア）から（イ）への

変化の割合は、$\frac{2}{3}$ ・・・①

・（ウ）から（エ）への

変化の割合は、$\frac{2}{3}$ ・・・②

同じようにどの２点を取っても、変化の割合はすべて$\frac{2}{3}$です。

このように、どこでも変化の割合が同じである場合は、グラフが直線になります。

$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

5. 実践（中学校）

「初期値」と「変化の割合」から具体的事象をイメージしてグラフを作成する

問題１　一次関数の式 $y=\boxed{-\frac{1}{2}}x-3$ のグラフをかいてみよう。 cm/分

（かき方）

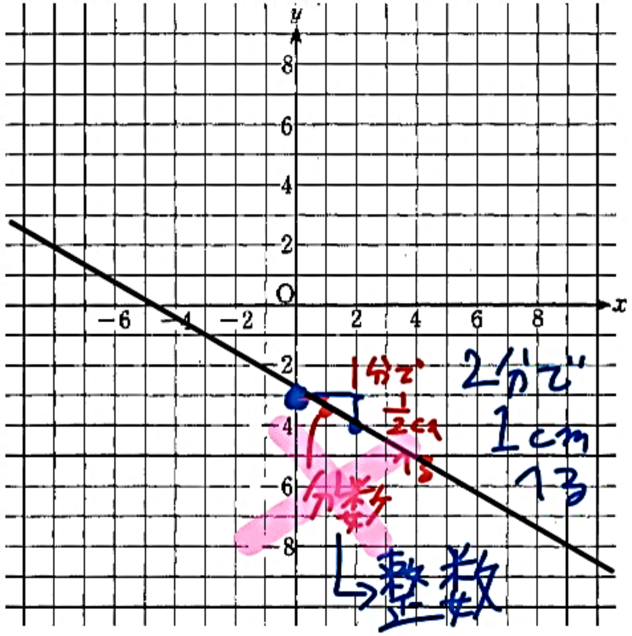
$y=\boxed{-\frac{1}{2}}x-3$

初期値 −3

2分で1cmへる

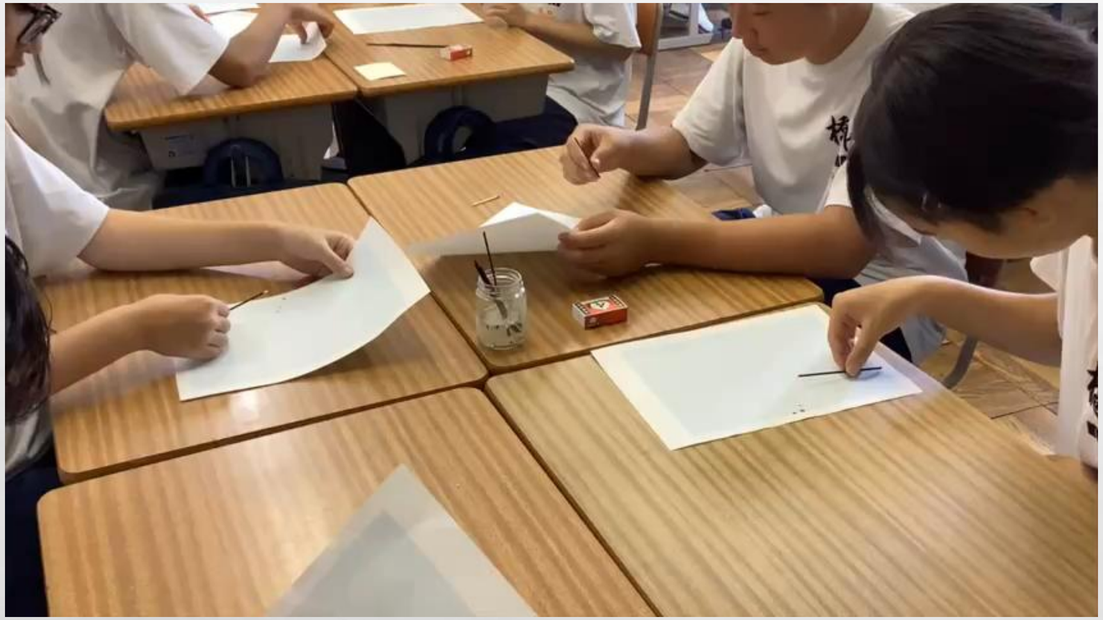
つまり、y 軸の「−3」の目盛りから出発して

「右に2，下に1」。



5．実践（中学校）

さらに“変化の割合”に着目して『線香実験』



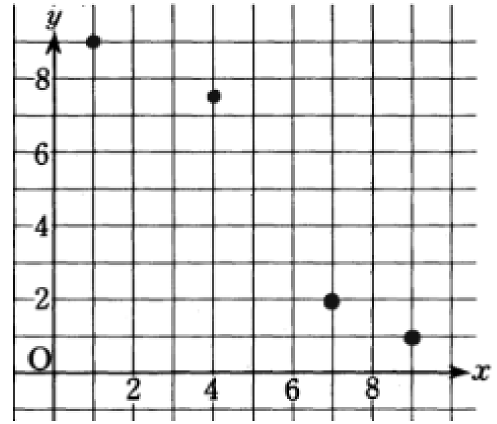
5. 実践（中学校）

複数区間で変化の割合が一定

問題４　ゆうかさんとけんごさんは、線香に火をつけ、紙にこげ跡をつけて、線香の長さを記録しました。この実験で燃やし始めてからx分後の線香の長さをy cm とします。
２人の会話を読んで、次の問いに答えなさい。

けんご「１分置きに長さを記録したら、yをxの式で表すことができたみたいだよ！」

ゆうか「それが…めんどくさくて４回しかこげ跡をつけていないんだ…。
しかも、途中で線香が折れちゃってこんなグラフに…」



けんご「え！折れちゃったの！！
先生が、折れてもくっつけてこげ跡をつけるようにって言ってたのに～」

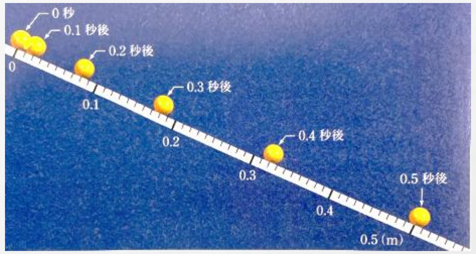
ゆうか「どうしよう！このままじゃ式がつくれないよ！」

けんご「あ！このグラフでも、変化の割合と初期値を求めることができそうだよ！」

問、ゆうかさんのグラフを見て、yをxの式で表しなさい。
その求め方を説明しなさい。

5. 実践(中学校)

中学校3年生　関数$y = ax^2$



ビー玉が転がった「時間」と「距離」に着目

5. 実践（中学校）

中学校3年生　関数$y = ax^2$

手を離れてから1秒間で何cm転がった？
⇒12.5cm

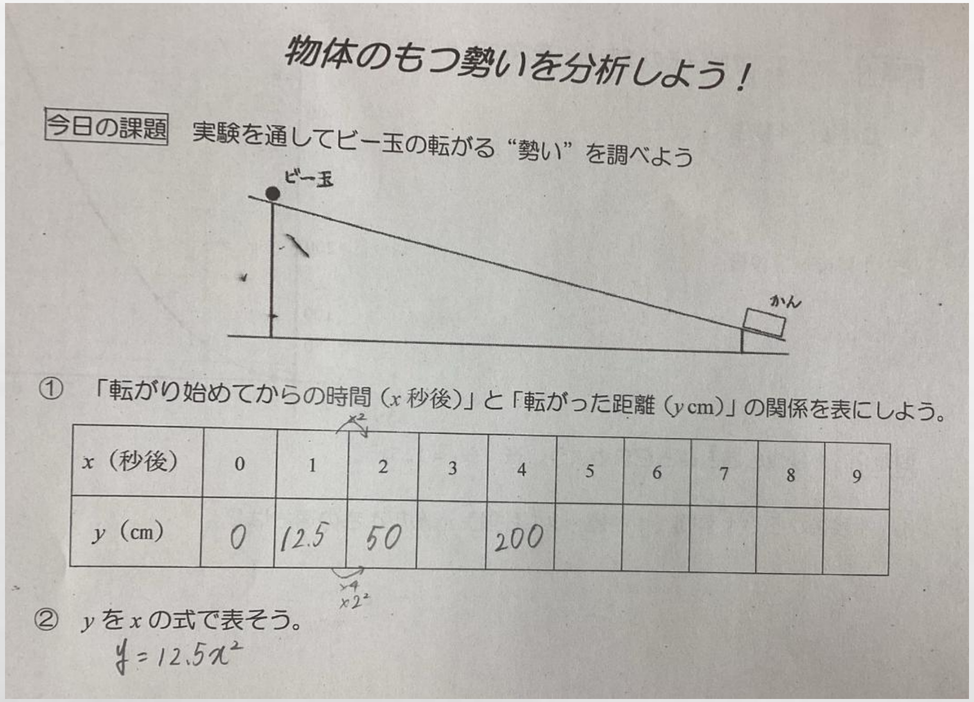
手を離れてから2秒間で何cm転がった？
⇒50cm

手を離れてから4秒間で何cm転がった？
⇒200cm

「時間x」に対する「距離y」の関係は？
※独立変数と従属変数の関係が理解できる

5．実践（中学校）

表・式・グラフ



物体のもつ勢いを分析しよう！

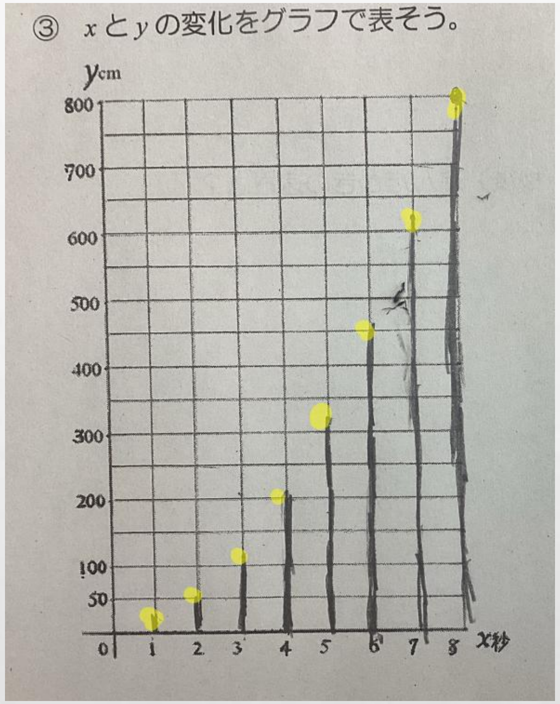
今日の課題　実験を通してビー玉の転がる"勢い"を調べよう

① 「転がり始めてからの時間（x 秒後）」と「転がった距離（y cm）」の関係を表にしよう。

x（秒後）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y（cm）	0	12.5	50		200					

② y を x の式で表そう。

$y = 12.5x^2$

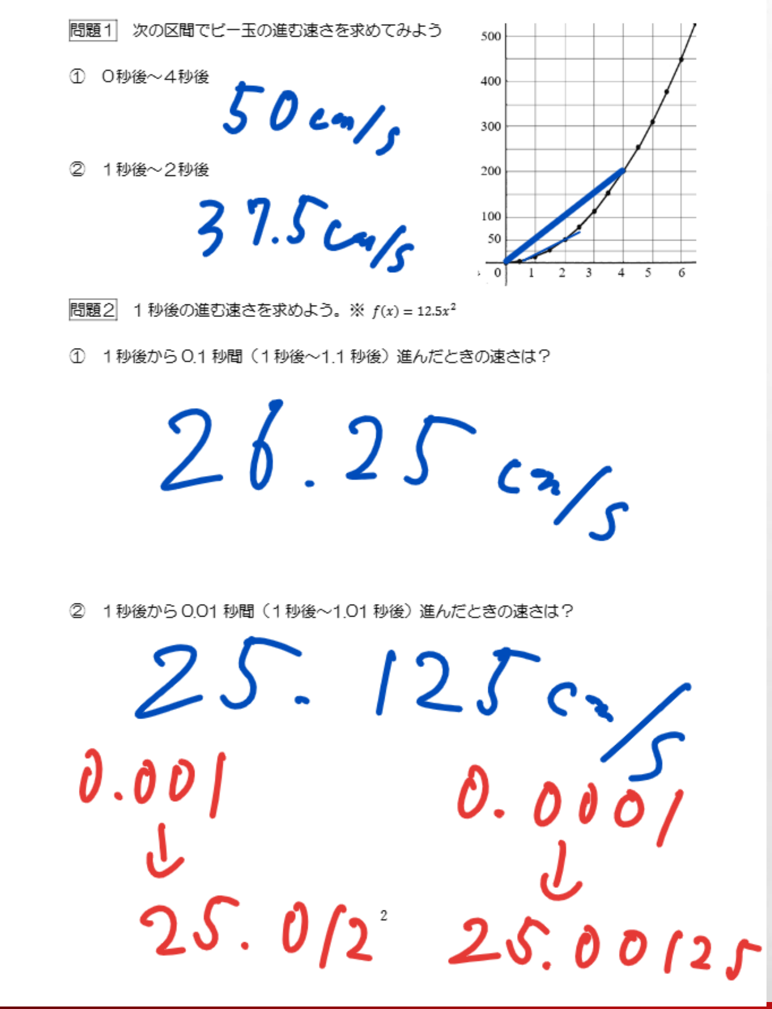


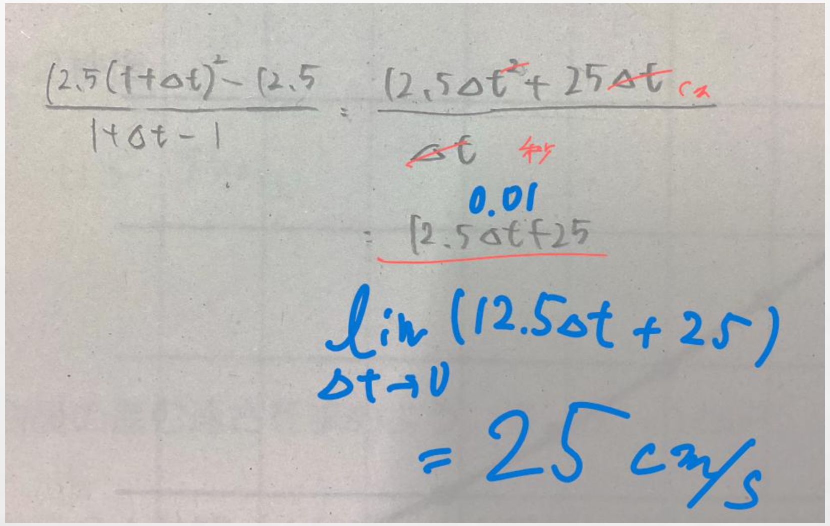
③ x と y の変化をグラフで表そう。

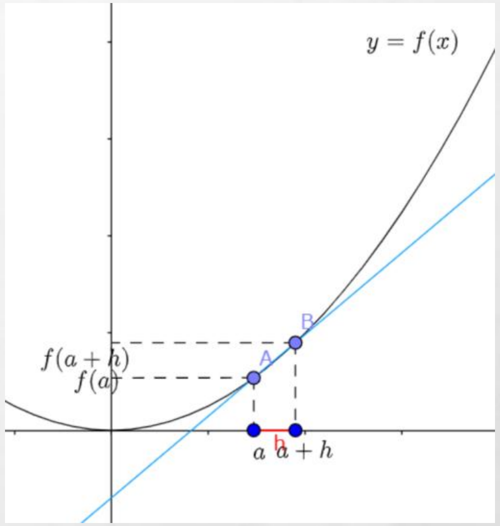
この後、正の範囲に限定して変化の割合（平均の速さ）や階差に着目。

5. 実践（中学校）

高校　数学Ⅱ　微分　「平均の速さ　⇒　瞬間の速さ」







二次関数　⇒　微分
関数の系統性

5. 実践(高等学校　微分)

成果

- 量を核として，量を線分化することで、

⇒ 「量→表」「量→式」「量→グラフ」の関係が理解できる

⇒ 「表→量」「式→量」「グラフ→量」の関係が量的な変化として捉えられる

- 具体的な事象を扱うことで、

「表→事象」「式→事象」「グラフ→事象」　⇒　もとの事象を考察し課題解決に生かす

以上の成果より<u>「事象」と「量」と「表・式・グラフ」の相互関連が、</u>

<u>学習者にとって「連続量が動的に変化する二つの数量関係」を理解する有効な手立てとなる</u>

6. 成果と課題

課題

- 線分が視覚優位の認識になり、表や式に比べて、グラフとの関連が強く表れる。線分化した量と表や式の関連を深める題材の設定が課題となる。

- 中学校の関数指導で、小学校からの流れを引き継ぎ、高等学校へつないでいくような教材設定が必要。とくに中学校1年生の正比例。

6. 成果と課題