解析学序論 I・補助プリント

補題 1. $I=[a,b]$, $f:I\to\mathbb{R}$ が I 上積分可能とする. このとき, $|f|$ も I 上積分可能である.

証明 f は I 上積分可能なので

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} R_f(\Delta)$$

が存在し (記号の意味は講義で用いたものと同じ), 同値な性質として

$$S=\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\Delta),$$

$$s=\lim_{\|\Delta\|\to 0} s(\Delta)$$

で与えられる (講義で証明したダルブーの定理) 上積分 S と下積分 s の値は一致すること (これも講義で証明済み) が分かる. ここで, $S(\Delta)$, $s(\Delta)$ は分割 Δ に対する過剰和, 不足和で

$$S(\Delta):=\sum_{j=1}^{n} M_j(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n}\sup f(I_j)(x_j-x_{j-1}),$$

$$s(\Delta):=\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n}\inf f(I_j)(x_j-x_{j-1})$$

であった (講義で定義済み). つまり $S=s$ ということは

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}(S(\Delta)-s(\Delta))(x_j-x_{j-1})=0$$

と同値である. ここで

$$(S(\Delta)-s(\Delta))(x_j-x_{j-1})$$

を計算してみると

$$\begin{aligned}(S(\Delta)-s(\Delta))(x_j-x_{j-1}) &= \sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1})\\ &= \sum_{j=1}^{n}(\sup f(I_j)-\inf f(I_j))(x_j-x_{j-1})\end{aligned}$$

より, 関数 f が I 上積分可能であることの必要十分条件は

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{j=1}^{n}(\sup f(I_j)-\inf f(I_j))(x_j-x_{j-1})=0$$

だと分かる. では関数 f が I 上積分可能であることを仮定して関数 $|f|$ に対して上記条件を確かめると

$$0\le \sup|f(I_j)|-\inf|f(I_j)|\le \sup f(I_j)-\inf f(I_j)$$

に注意すれば

$$0\le\sum_{j=1}^{n}(\sup|f(I_j)|-\inf|f(I_j)|)(x_j-x_{j-1})\le\sum_{j=1}^{n}(\sup f(I_j)-\inf f(I_j))(x_j-x_{j-1})$$

で, はさみうちの原理より

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{j=1}^{n}(\sup|f(I_j)| - \inf|f(I_j)|)(x_j - x_{j-1}) = 0$$

すなわち, $|f|$ は I 上積分可能である. $\square$

補題 2. $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上積分可能とする. このとき,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

証明　f は I 上積分可能なので

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} R_f(\Delta)$$

が存在する. ここで, 補題 1 より $|f|$ も I 上積分可能なので

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} R_{|f|}(\Delta)$$

が存在する. よって以下の不等式

$$|R_f(\Delta)| = \left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) = R_{|f|}(\Delta)$$

において, $|\Delta| \to 0$ とすれば $g(r) := |r|$ の連続性より

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{\|\Delta\|\to 0} R_f(\Delta)\right| = \lim_{\|\Delta\|\to 0}|R_f(\Delta)| \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0}\left|R_{|f|}(\Delta)\right| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

$\square$