2021/03/23/No.1

解析学序論I・自習シート

問 1 A, B を集合とする. $A \subset B$ と $A = B$ の定義をテキストから探し出してそれぞれかけ.

A の元はすべて B の元であるとき, $A \subset B$ と定義する. すなわち, 任意の (すべての)$x \in A$ に対して $x \in B$ が成立するとき $A \subset B$ と定義する.
$A \subset B$ かつ $A \subset B$ を満たすとき, $A = B$ と定義する.

問 2 A, B, C を集合とする. 集合の等号の定義に従い次を証明せよ.

(1) $A = B$ かつ $B = C$ ならば $A = C$.

集合の等号 $A = C$ を示すには $A \subset C$ かつ $A \supset C$ を示せばよい.

解答例 1　($\subset$) 任意の $x \in A$ に対して, 仮定 $A = B$ より等号の定義に戻れば $A \subset B$ が得られるので $x \in B$ となる. また仮定 $B = C$ より等号の定義に戻れば $B \subset C$ が得られるので, 最初に選んできた x について $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.

($\supset$) 任意の $x \in C$ に対して, 仮定 $B = C$ より等号の定義に戻れば $B \supset C$ が得られるので $x \in B$ となる. また仮定 $A = B$ より等号の定義に戻れば $A \supset B$ が得られるので, 最初に選んできた x について $x \in A$. ゆえに $A \supset C$.

以上より $A \subset C$ かつ $A \supset C$ が証明されたので $A = C$ が得られる. □

上記証明では, どの定義を用いたのかが分かるよう, 面倒なくらい丁寧に記述してあるが実際には本質を押さえていればもっと簡単に記述してもよい.

解答例 2　($\subset$) $^{\forall}x \in A$ に対して, 仮定 $A = B$ より $A \subset B$ が得られるので $x \in B$. また仮定 $B = C$ より $B \subset C$ が得られるので, $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.

($\supset$) $^{\forall}x \in C$ に対して, 仮定 $B = C$ より $B \supset C$ が得られるので $x \in B$. また仮定 $A = B$ より $A \supset B$ が得られるので, $x \in A$. ゆえに $A \supset C$.

以上より $A \subset C$ かつ $A \supset C$ が証明されたので $A = C$ が得られる. □

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

解答例　($\subset$) 任意の $x \in A \cap (B \cup C)$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$, すなわち $x \in B$ または $x \in C$ が成立する.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(i) $x \in B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるので $x \in A \cap B$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(ii) $x \in C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ であるので $x \in A \cap C$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(i)(ii) より

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

($\supset$) 任意の $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ に対して, $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ が成立する.

(i) $x \in A \cap B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(ii) $x \in A \cap C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(i)(ii) より

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

以上より, ($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する. □

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

解答例　($\subset$) 任意の $x \in A \cup (B \cap C)$ に対して, $x \in A$ または $x \in B \cap C$ が成立する.

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が成立する. ゆえに

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(ii) $x \in B \cap C$ のとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立するので, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が成立するといえる. ゆえに

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(i)(ii) より

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

($\supset$) 任意の $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ に対して, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が成立する.

(i) $x \in A$ のとき,

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(ii) $x \notin A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が成立していることから, $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立する (もしそうでなければ $x \notin B$ または $x \notin C$ ということになるが, その場合 $x \in A \cup B$ か $x \in A \cup C$ のどちらかに矛盾する). よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(i)(ii) より

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

以上より, ($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する. □