

## 解析学序論I・自習シート

問1  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  をディリクレ関数とする, すなわち

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}). \end{cases}$$

このとき, 区分別積法によって  $[0, 1]$  区間で積分を計算をしてしまうと 1 になることを確かめよ. ただし, ここでいう区分別積法とは, 区間を  $n$  等分し, 各区間の右端の値で長方形の面積の和を取り極限操作を行う

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

を指す.

解答例  $n \in \mathbb{N}$  とする. 区間  $[0, 1]$  を  $n$  等分すると全ての分点  $x_k = k/n$  は有理数なので  $f(x_k) = 1$  となる. よって

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

ゆえに  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = 1.$$

**定義** 微分して  $f(x)$  になる関数を  $f(x)$  の原始関数という.

一般に  $F(x)$  が  $f(x)$  の原始関数ならば,  $C' = 0$  より  $F(x) + C$  も  $f(x)$  の原始関数となる. しかし  $f(x)$  の原始関数が  $F(x) + C$  で全て網羅されているかどうかはまだ分からない.  $y = \cos x$  の原始関数は  $y = \sin x + C$  だけだろうか.  $y = \sin x + C$  とは全く異なる, まだ我々の知らない何か別の関数があって, 微分したら  $y = \cos x$  になるかもしれない.

しかしそのようなことはなく,  $f(x)$  の原始関数どうしの違いは定数だけであることを示していく.

問2  $f \in C([a, b])$ ,  $f$  は  $(a, b)$  上で微分可能とする. このとき  $f'(x) = 0$  ( $\forall x \in (a, b)$ ) ならば  $f$  は定数関数であること示せ<sup>1)</sup>.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

<sup>1)</sup> $\forall x \in [a, b]$  について, コーシーの平均値の定理を  $f(x)$  と  $g(x) = x$  について  $[a, x]$  上で利用せよ.

証明  $x \in (a, b]$  とする. コーシーの平均値の定理を  $f(x)$  と  $g(x) = x$  について  $[a, x]$  上で利用すると,  $g'(x) = 1$  よりある  $c \in (a, x)$  が存在して

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f'(c)}{1}.$$

よって, 常に  $f'(x) = 0$  ならば  $f'(c) = 0$  より

$$f(x) - f(a) = 0,$$

$$f(x) = f(a).$$

一方  $x = a$  のときにはすでに  $f(x) = f(a)$  であるので, 以上により

$$f(x) = f(a) \quad (\forall x \in [a, b]).$$

これは  $f$  は定数関数であることを意味する. □

問 3  $F_1(x)$  と  $F_2(x)$  をそれぞれ  $f(x)$  の任意の原始関数とする. このとき  $F_1$  と  $F_2$  の差は高々定数である<sup>2)</sup>ことを示せ.

証明  $F_1 - F_2$  が定数関数であることを示す. 原始関数の定義より

$$F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x) \quad (\forall x \in [a, b]),$$

であるので

$$\{F_1(x) - F_2(x)\}' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad (\forall x \in [a, b]).$$

よって問 1 より関数  $F_1 - F_2$  は定数関数である, すなわち  $\exists C \in \mathbb{R}$  s.t.

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

$$F_1(x) = F_2(x) + C \quad (\forall x \in [a, b]).$$

つまり  $F_1$  と  $F_2$  の差は高々定数である. □

これにより先の問題は解決される. すなわち  $y = \cos x$  の原始関数の 1 つが  $y = \sin x$  である以上, 他の原始関数は形は違うかもしれないが本質的には  $y = \sin x + C$  だけである. つまり, もし何か謎の関数  $y = X(x)$  を微分すると,  $X'(x) = \cos x$  となったならば,  $y = X(x)$  の表現がどのようになっているかに関わらず, それは  $X(x) = \sin x + C$  とかけることが証明された.

---

<sup>2)</sup> 違いがあってもその差は定数という意味.