解析学序論 I・自習シート

問 1 $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$ (ただし $n \in \mathbb{N}$) とする．$n \geq 2$ に対して次の公式を証明せよ．[1)]

$$I_n := \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

解答例 $n \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)'\ dx \\ &= [\sin^{n-1} x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x)'(-\cos x)\ dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\ dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\ dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\ dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx \\ I_n &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

よって，

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad {}^\forall n \geq 2$$

(i) n が偶数のとき，$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \vdots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1)] 部分積分で $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる漸化式をまずは求める．

(ii) n が奇数のとき, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ より

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \vdots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

□

問 2　次の広義積分を求めよ. [2)]

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$

解答例　部分積分を 2 回用いると

$$\begin{aligned} \int_0^M x^2 e^{-x} dx &= \int_0^M x^2 (-e^{-x})' dx \\ &= [-x^2 e^{-x}]_0^M - \int_0^M 2x(-e^{-x}) dx \\ &= -M^2 e^{-M} - \int_0^M 2x(e^{-x})' dx \\ &= -M^2 e^{-M} - \left\{ [2x(e^{-x})]_0^M - \int_0^M 2e^{-x} dx \right\} \\ &= -M^2 e^{-M} - \left\{ 2Me^{-M} - [-2e^{-x}]_0^M \right\} \\ &= -M^2 e^{-M} - 2Me^{-M} + \left(-2e^{-M} + 2 \right) \\ &= -\frac{M^2}{e^M} - \frac{2M}{e^M} - \frac{2}{e^M} + 2. \end{aligned}$$

ここでロピタルの定理より,

$$\lim_{M \to +\infty} \frac{M^2}{e^M} = \lim_{M \to +\infty} \frac{2M}{e^M} = \lim_{M \to +\infty} \frac{2}{e^M} = 0,$$

$$\lim_{M \to +\infty} \frac{2M}{e^M} = \lim_{M \to \infty} \frac{2}{e^M} = 0$$

であるので

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M x^2 e^{-x} dx = 2.$$

[2)] (1) は部分積分を 2 回行う. (2) は $e^x = t$ とおき部分分数分解を行う

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx$

解答例　$e^x = t$ とおくと $dt = e^x dx$ で x が 0 から M まで変化するとき, t は 1 から $m := e^M$ まで変化し

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx &= \int_0^M \frac{e^x}{e^{2x} + 2 + 3e^x} dx \\ &= \int_1^m \frac{1}{t^2 + 2 + 3t} dt.\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{t^2+2+3t} = \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

となるならば

$$A(t+2) + B(t+1) = 1$$

より係数を比較して,

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 2A + B = 1. \end{cases}$$

よって, $A = 1$, $B = -1$. すなわち部分分数分解によって

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx &= \int_1^m \frac{1}{t^2 + 2 + 3t} dt \\ &= \int_1^m \frac{1}{t+1} dt - \int_1^m \frac{1}{t+2} dt \\ &= [\log(t+1)]_1^m - [\log(t+2)]_1^m \\ &= (\log(m+1) - \log 2) - (\log(m+2) - \log 3) \\ &= \log(m+1) - \log(m+2) - \log 2 + \log 3 \\ &= \log\left(\frac{m+1}{m+2}\right) + \log\frac{3}{2} \\ &= \log\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{2}{m}}\right) + \log\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

ここで, $M \to +\infty$ のとき $m := e^M \to +\infty$ で,

$$\lim_{M\to+\infty} \log\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{2}{m}}\right) = 0$$

より

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx = \log\frac{3}{2}$$