解析学序論I・自習シート

問　[テーラーの定理] $f \in C^n([a,b])$, f は (a,b) 上, $n+1$ 階微分可能とする．このとき，ある $c \in (a,b)$ が存在して，

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}$$

となることを示せ．

解答例

$$F(x) = f(b) - \left(f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k\right),$$
$$G(x) = (b-x)^{n+1}$$

に対して，

$$F(b) = 0, \quad F(a) = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k,$$
$$G(b) = 0, \quad G(a) = (b-a)^{n+1},$$
$$F'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1}\right\},$$

$$F'(c) = -f'(c) - \left\{f''(c)(b-c) - f'(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{2!}(b-c)^2 - f''(c)(b-c) + \cdots\right\}$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n,$$

$$G'(x) = -(n+1)(b-x)^n,$$
$$G'(c) = -(n+1)(b-c)^n$$

であり，コーシーの平均値の定理を用いると，ある $c \in (a,b)$ が存在して

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

より

$$\frac{-f(b)+f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{-(b-a)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n}{-(n+1)(b-c)^n},$$

すなわち，

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}$$

を満たす． □

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．