解析学序論 I・自習シート

問 1　級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

が $+\infty$ に発散することを, 次の小問に沿って証明せよ. [1]

(1)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

を示せ.

解答例　項数は $2n-(n+1)+1=n$ であることに注意して

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}\times n=\frac{1}{2}.$$

(2) S_m を級数の第 m 項までの部分和, すなわち $S_m:=\sum_{n=1}^{m}1/n$ とおく. $S_{2m}-S_m$ に注意して, 数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ はコーシー列ではないことを示せ.

解答例　数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であると仮定すると任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ が存在して,

$$|S_n-S_m|<\varepsilon\quad({}^\forall n,m\geq N_\varepsilon)$$

を満たすので, $\varepsilon:=1/2$ に対しても, ある自然数 $N\in\mathbb{N}$ が存在して,

$$|S_n-S_m|<\frac{1}{2}\quad({}^\forall n,m\geq N)$$

を満たす. しかしどのように $m\geq N$ を選んでも $n=2m$ との組に対して, $2m,m\geq N$ ではあるが

$$\begin{aligned}S_{2m}-S_m&=\sum_{n=1}^{2m}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\\&=\sum_{n=m+1}^{2m}\\&=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{2m}\\&>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$|S_{2m}-S_m|=S_{2m}-S_m>\frac{1}{2}$$

となり矛盾. よって数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ はコーシー列ではない.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] 高校数学では区分求積法と比較によって証明済み

(3) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ は $+\infty$ に発散すること示せ.

解答例　数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は単調増加数列であるので, 収束するか $+\infty$ に発散するかのいずれかである. もし数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が収束すれば, 数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ はコーシー列となるが, (2) より数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ はコーシー列ではないことが分かっている. よって数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は $+\infty$ に発散する.

問 2　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が収束するならば $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であることを証明せよ.

解答例　S_m を級数の第 m 項までの部分和, すなわち $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_m$ とおく. 仮定より級数が収束するので数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は収束する, すなわちコーシー列である. よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$|S_{n'} - S_n| < \varepsilon \quad ({}^\forall n', n \geq N'_\varepsilon)$$

を満たすが, どのように $n \geq N'_\varepsilon$ を選んでも $n' = n+1$ との組に対しても $n+1, n \geq N'_\varepsilon$ を満たすので

$$|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N'_\varepsilon)$$

よって $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. (実際, $N_\varepsilon := N'_\varepsilon + 1$ とすれば, 上記を $m = n+1$ で書き換えて, $m \geq N_\varepsilon$ ならば $n+1 \geq N_\varepsilon$, すなわち $n \geq N_\varepsilon - 1 = N'_\varepsilon$ なので

$$|a_m - 0| = |S_m - S_{m-1}| < \varepsilon \quad ({}^\forall m \geq N_\varepsilon)$$

とできるからである.)

問 3　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を単調減少数列で

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

とする. このとき正負の項が交互に現れる級数 (**交代級数**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

は収束することを, 次の小問に沿って証明せよ.

(1) S_m を級数の第 m 項までの部分和, すなわち $S_m := \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} a_n$ とおく. 数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は単調増加であることを示せ.

解答例　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少数列であることから $a_n \geq 0$ に注意して

$$S_{2m+2} - S_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq 0$$

すなわち, 数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は単調増加である.

(2) $S_{2m} < a_1$ $(m \in \mathbb{N})$, すなわち数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は上に有界であることを示せ.

解答例

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \le a_1 \quad ({}^\forall m \in \mathbb{N}).$$

すなわち数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は上に有界である.

(3) 数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ も数列 $\{S_{2m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ も同じ値 S に収束することを示せ.

解答例　(1) と (2) より数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は単調増加かつ上に有界であるのである値 S に収束する. 次に仮定 $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ に注意して

$$\begin{aligned} |S_{2m-1} - S| &= |(S_{2m} - a_{2m}) - S| \\ &\le |S_{2m} - S| + |a_{2m}| \\ &\to 0 \quad (m \to +\infty). \end{aligned}$$

よって, 数列 $\{S_{2m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ も同じ値 S に収束する.

(4) 交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

は収束することを示せ.

解答例　n が偶数のとき, ある自然数 $m \in \mathbb{N}$ が存在して $n = 2m$ とでき

$$S_{2m} = -a_2 - a_4 - a_6 - \cdots - a_n \le S_n \le a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2m-1} = S_{2m-1}.$$

n が奇数のとき, ある自然数 $m \in \mathbb{N}$ が存在して $n = 2m - 1$ とでき

$$S_{2m} = -a_2 - a_4 - a_6 - \cdots - a_{2m} \le S_n \le a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_n = S_{2m-1}.$$

よって, $m := [(n+1)/2]$ [2] によって

$$S_{2m} \le S_n \le S_{2m+1}$$

とでき, $n \to +\infty$ のとき $m \to +\infty$ より, はさみうちの原理から

$$S_n \to S \quad (n \to +\infty).$$

[2] ガウス記号, すなわち, それをこえない最大の整数値. $[3] = 3, [3.5] = 3, [4] = 4$.