2021/4/23/No.2

解析学序論 I・自習シート

問 1　a, b, c, d, e の 5 つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じように全ての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b\}$$

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b,\ c,\ d,\ e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ全て求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は $A_1,\ A_2,\ A_3$ のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の 3 つである.

(i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1, 2, 3$

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1$

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 2, 3$

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 3$

問 2　次の否定を述べよ.

(1) 「彼はすべての都道府県を旅した.」

否定　「ある都道府県があって, 彼はその都道府県を旅していない.」

「全ての都道府県を旅していない.」は言い過ぎ.

(2) 「ある年があって, 数学科の人数が 40 人を超えた.」

否定　「どの年も数学科の人数は 40 人を超えていない.」

「ある年があって, 数学科の人数が 40 人を超えていない.」では足りない.

(3) 「ある講義があって, その講義は京教のすべての学生が受講している.」

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

否定　「どのような講義に対してもある京教の学生がいて, その講義を受講していない.」

(4) 「解析学序論 I を受講しているすべての学生に対してある B リーグのチームがあって, その学生はそのチームが好きだ.」

否定　「解析学序論 I を受講しているある学生がいて, どの B リーグのチームもその学生は好きではない.」

問 3　実数の集合を $\mathbb{R}$ とかく. $E \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を記号で書け.

(1) $a < b$.

(2) $a \in \mathbb{R} \setminus E$.

(3) $x \leq a$ $({}^\forall x \in E)$.

(4) ${}^\exists x_1 \in E$ s.t. $x_1 \geq b$.

(5) ${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. $x \leq K$ $({}^\forall x \in E)$.

解答例　(1) $a \geq b$. (2) 「$a \in \mathbb{R}$ かつ $a \notin E$」の否定なので「$a \notin \mathbb{R}$ または $a \in E$」となるが $a \in \mathbb{R}$ は仮定されているので $a \in E$. (3) 「任意の $x \in E$ に対して $x \leq a$」の否定なので, ある $x_0 \in E$ が存在して, 反例となる. つまり ${}^\exists x_0 \in E$ s.t. $x < a$. (4) 「ある $x_1 \in E$ が存在して $x_1 \geq b$」の否定なので, 任意の $x \in E$ に対して $x \geq b$ を満たさないということ, つまり $x < b$ $({}^\forall x \in E)$. (5) 「ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」の否定なので任意の $K \in \mathbb{R}$ に対して, 「任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」が否定される. つまり, ある $x_K \in E$ が存在して $x_K > K$.

注　(5) のように論理記号が複数ある場合の否定を求めるには,

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R} \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{x \leq K}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg \ \boxed{\exists K \in \mathbb{R} \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{x \leq K}}}$$

を

$$\boxed{\forall K \in \mathbb{R} \ \boxed{\exists x_K \in E \ \boxed{x_K > K}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の命題の否定によって求め, 必要に応じてあらためて ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x_K \in E$ s.t. $x_K > K$ と否定を機械的に得ることもできる.