解析学序論 I・自習シート

問 1 A_n を空でない集合とし, $A_n \supset A_{n+1}$ $({}^\forall n \in \mathbb{N})$ と仮定する. 集合 C_n を次の様に定義する:

$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad ({}^\forall n \geq 2).$$

このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)

$$C_n \subset C_{n+1} \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}).$$

(2)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

解答例 (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_n \subset C_{n+1}$ を示す. $n = 1$ のとき, $C_1 = \emptyset \subset C_2$ より成立. $n \geq 2$ のとき, 任意の $x \in C_n$ に対して, $x \in C_{n+1}$ を示せばよいが,

$$x \in C_n = A_1 \setminus A_n$$

より, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_n$ である. ここで, 仮定 $A_n \supset A_{n+1}$ より,

$$x \notin A_{n+1}.$$

(実際, もしそうでなく $x \in A_{n+1}$ と仮定すると, $x \in A_{n+1} \subset A_n$ となり矛盾.) ゆえに

$$x \in A_1 \setminus A_{n+1} = C_{n+1}.$$

以上より $C_n \subset C_{n+1}$. □

(2) ($\subset$) 任意の $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \in C_{n_0}.$$

このとき, $C_1 = \emptyset$ より $n_0 \neq 1$ でさらに, C_{n_0} の定義から

$$x \in A_1 \setminus A_{n_0}.$$

すなわち, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_{n_0}$ なので

$$x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

(実際, もしそうでないなら $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$ となるが, $x \notin A_{n_0}$ に矛盾.) ゆえに

$$x \in A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

となり, $(\subset)$ が成立.

$(\supset)$ 任意の $x \in A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ に対して, $x \in A_1$ かつ, $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \notin A_{n_0}.$$

(実際, もしそうでないなら任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$ となるが, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ となり矛盾.) このとき, $x \in A_1$ より $n_0 \neq 1$. ゆえに, $x \in A_1 \setminus A_{n_0} = C_{n_0}$. よって,

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

となり $(\supset)$ が成立.

以上より等号が成立. □

問 2　X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値[1)]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

証明　「(1) ならば (2)」を示す. (1) を仮定する. 任意の $x \in A$ に対して, $x \in A \subset X$ より (1) を用いれば $x \in A^c \cup B$. つまり $x \in A^c$ または $x \in B$. しかし $x \in A$ を仮定しているので $x \notin A^c$ より $x \in B$. ゆえに $A \subset B$.
「(2) ならば (3)」を示す. (2) を仮定する. 背理法で示す. もしも $A \cap B^c \neq \emptyset$ ならば, ある元 $x \in A \cap B^c$ が存在する. この元 x は $x \in A$ かつ $x \in B^c$ を満たすが, $A \subset B$ より $x \in B$ かつ $x \in B^c$ となり矛盾. よって $A \cap B^c = \emptyset$.
「(3) ならば (1)」を示す.
$(\subset)$ 任意の $x \in A^c \cup B$ に対して, X は全体集合なのでつねに $x \in X$ となる. よって $A^c \cup B \subset X$ が成立.
$(\supset)$ 任意の $x \in X$ に対して,

(i) $x \in B$ のとき, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c$ であるが, さらに $x \notin A$ となる. 実際, もしそうでないならば $x \in B^c$ かつ $x \in A$ となるが, 共通部分の定義より $x \in A \cap B^c$ となり, (3) に矛盾する. ゆえに $x \in A^c$ を得るので, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

いずれの場合にも $x \in A^c \cup B$ となり, $A^c \cup B \supset X$ を得る.
以上により (1) の等号が成立する.

ゆえに 3 条件は同値となる. □

[1)]「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

「(3) ならば (1)」の別解　(3) を仮定する．ド・モルガンの法則より

$$(A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

であり, $\emptyset^c = X$ より (1) が成立. $\square$

問 3　実数列[2] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, その数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合 $\{a_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ とみて[3] 上に有界かつ下に有界のとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界数列であると定義する．このとき次を示せ.

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が有界数列.} \Longleftrightarrow {}^{\exists} M > 0 \text{ s.t. } |a_n| \le M \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}).$$

証明　($\Rightarrow$) を示す．$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を有界数列と仮定する．$\{a_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\} =: E$ とおく．E は上に有界であるので, ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して

$$x \le K \quad ({}^{\forall} x \in E),$$

であるが E の元 x は a_n のどれかなので,

$$a_n \le K \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}),$$

と書き直せる．また, E は下に有界であるので, ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して

$$a_n \ge k \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}),$$

つまり

$$k \le a_n \le K \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}),$$

そこで, $M := \max\{|k|, |K|, 1\}$ とおくと, $M > 0$ で,

$$-M \le -|k| \le k \le a_n \le K \le |K| \le M \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}).$$

以上より

$$|a_n| \le M \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}).$$

($\Leftarrow$) を示す．ある $M > 0$ が存在して

$$|a_n| \le M \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

とする．このとき

$$-M \le a_n \le M \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}).$$

よって, M は E の上界である．つまり, E は上に有界である．また $-M$ は E の下界である．つまり, E は下に有界である．以上より, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は集合とみて有界であるので, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界数列である. $\square$

問 4　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする．このとき次を証明せよ.

(1) $\inf A \le \sup A$.

(2) $a \le b$ $({}^{\forall} a \in A, {}^{\forall} b \in B)$ が成立するならば $\sup A \le \inf B$.

(3) 任意の $a \in A$ に対してある $b_a \in B$ が存在して $a \le b_a$ が成立するならば $\sup A \le \sup B$.

[2] 実数の数列という意味.

[3] 数列を集合とみるとは, 数列の各項を元とみて, その並び順を気にしないで集まりを考えることである.

解答例　(1) $x \in A$ とする．$\sup A$ と $\inf A$ の定義より，

$$\inf A \leq x, \quad x \leq \sup A.$$

つまり，$\inf A \leq \sup A$. $\square$

(2) 仮定より，任意の $b \in B$ に対して次が成立する：

$$a \leq b \quad ({}^\forall a \in A).$$

よって b は A の上界の 1 つである．一方 $\sup A$ は A の最小上界なので

$$\sup A \leq b$$

が成立する．次に $b \in B$ は任意であったので上の式より $\sup A$ は B の下界の 1 つである．$\inf B$ は最大下界であったので

$$\sup A \leq \inf B$$

を得る. $\square$

(3) $\sup B$ の定義より

$$b \leq \sup B \quad ({}^\forall b \in B).$$

任意の $a \in A$ に対して，仮定よりある $b_a \in B$ が存在して

$$a \leq b_a$$

であるが，$b_a \in B$ より

$$a \leq b_a \leq \sup B$$

を得る．次に $a \in A$ は任意であったので $\sup B$ は A の上界の 1 つである．一方 $\sup A$ は最小上界であったので

$$\sup A \leq \sup B$$

を得る. $\square$

注　(2) と (3) の証明の違いをはっきりと理解すべきである．(3) の証明中，任意の $a \in A$ に対して

$$a \leq b_a$$

が成立するからと言って，b_a が A の上界の 1 つとは言えないことに注意が必要．b_a は a に依存して決まる値である．a が変われば b_a も変わってしまうので b_a がどのような $a \in A$ をも上から押さえる値とは言えない．