解析学序論 I・自習シート

問 1　$E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合, $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする. 次の問に答えよ.

(1) E が上に有界であることの定義を論理記号 (全称記号 ($\forall$), 存在記号 ($\exists$)) を用いてかけ.

解答例　${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. $x \le K$ (${}^\forall x \in E$), または, ${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^\forall x \in E$, $x \le K$.

(2) (1) の否定を作り E が上に有界でないことの定義を論理記号でかけ.

解答例　${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. $x \le K$ (${}^\forall x \in E$) の否定なので ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x_K \in E$ s.t. $x_K > K$.

—

もちろん

${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x \in E$ s.t. $x > K$ でもよいし,

${}^\forall r \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x_r \in E$ s.t. $x_r > r$ でもよい. 文字が違っても本質的に同じこと. ちなみに

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \le K}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg\ \boxed{\exists K \in \mathbb{R}\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \le K}}}$$

を

$$\boxed{\forall K \in \mathbb{R}\ \boxed{\exists x \in E\ \boxed{x > K}}}$$

と入れかえによって求め, 必要に応じてあらためて ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x \in E$ s.t. $x > K$ と書いてもよい.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が以下を満たすとき, $+\infty$ に発散すると定義する: ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists N_K \in \mathbb{N}$ s.t.

$$a_n > K \quad ({}^\forall n \ge N_K).$$

数列 $\{b_n\}$ を $b_n := n$ と定義すると, $\{b_n\}$ は $+\infty$ に発散することを証明せよ.

解答例　任意の $K \in \mathbb{R}$ に対して, アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_K \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$K < N_K.$$

よって,

$$b_n = n \ge N_K > K \quad ({}^\forall n \ge N_K)$$

より, $\{b_n\}$ は $+\infty$ に発散する.

(4) 教科書を参考に数列 $\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散することの定義を論理記号で書け.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例　${}^\forall K \in \mathbb{R}, {}^\exists N_K \in \mathbb{N}$ s.t.

$$a_n < K \quad ({}^\forall n \geq N_K).$$

問 2　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする．次を証明せよ．

(1) $0 \in A,\, 0 \in B$ ならば $\sup(A \cup B) \leq \sup A + \sup B$.

証明　任意の $x \in A \cup B$ に対して，$x \in A$ または $x \in B$．仮定 $0 \in A,\, 0 \in B$ より，$0 \leq \sup A,\, 0 \leq \sup B$ に注意して，

(i) $x \in A$ のとき，$x \leq \sup A \leq \sup A + \sup B$.

(ii) $x \in B$ のとき，$x \leq \sup B \leq \sup A + \sup B$.

よって (i)(ii) より $x \leq \sup A + \sup B$．すなわち $\sup A + \sup B$ は $A \cup B$ の上界の 1 つである．一方，$\sup(A \cup B)$ は $A \cup B$ の最小上界なので

$$\sup(A \cup B) \leq \sup A + \sup B.$$

□

(2) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$. [1)]

証明　$(\leq)$ $A \subset A \cup B$ より，

$$\inf A \geq \inf(A \cup B).$$

同じく，$B \subset A \cup B$ より，

$$\inf B \geq \inf(A \cup B).$$

ゆえに

$$\inf(A \cup B) \leq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

$(\geq)$ $\alpha := \inf A,\, \beta := \inf B$ とおく．任意の $z \in A \cup B$ に対して，$z \in A$ または $z \in B$．

(i) $z \in A$ のとき，$z \geq \alpha \geq \min\{\alpha, \beta\} = \min\{\inf A, \inf B\}$.

(ii) $z \in B$ のとき，$z \geq \beta \geq \min\{\alpha, \beta\} = \min\{\inf A, \inf B\}$.

ゆえに，$\min\{\inf A, \inf B\}$ は $A \cup B$ の下界の 1 つである．一方，$\inf(A \cup B)$ は $A \cup B$ の最大下界なので

$$\inf(A \cup B) \geq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

以上より等号が成立する．　□

(3) $-A := \{-x, x \in A\}$ (つまり $-A := \{y \in \mathbb{R} :{}^\exists\, x \in A$ s.t. $y = -x\}$) と定義すると

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

[1)] ただし，任意の実数 $r, s \in \mathbb{R}$ に対して $\min\{r, s\}$ とは r と s の小さい方と定義する．すなわち

$$\min\{r, s\} := \begin{cases} r & \text{if} \quad r \leq s, \\ s & \text{if} \quad r > s. \end{cases}$$

証明　$\alpha := \sup(-A)$ とおくと,

(i) $y \leq \alpha \quad ({}^\forall y \in -A)$,

(ii) ${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists y_\varepsilon \in -A$ s.t.

$$\alpha - \varepsilon < y_\varepsilon.$$

そこで, 任意の $x \in A$ に対して $-x \in -A$ であるので, (i) より

$$-x \leq \alpha,$$

すなわち

$$x \geq -\alpha,$$

が成立する. 次に (ii) より ${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists y_\varepsilon \in -A$ s.t.

$$\alpha - \varepsilon < y_\varepsilon,$$

すなわち

$$-\alpha + \varepsilon > -y_\varepsilon,$$

で $x := -y_\varepsilon$ とおくと $x \in A$ となる. これらをまとめると

(a) $x \geq -\alpha \quad ({}^\forall x \in A)$,

(b) ${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists x \in A$ s.t.

$$-\alpha + \varepsilon > x.$$

　これは $-\alpha = \inf A$ を意味するので

$$\sup(-A) = \alpha = -\inf A.$$