解析学序論 I・自習シート

問 1　数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad (n \to \infty)$$

とする. このとき

$$a_n b_n \to ab \quad (n \to \infty)$$

を証明せよ. ($\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるので有界であることに注意し, テキスト P.8 を参考にせよ.)

解答例

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon)$$

を示せばよい.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるので有界である. すなわち, ある定数 $M > 0$ が存在して

$$|a_n| \leq M \quad (^\forall n \in \mathbb{N})$$

であることに注意する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 仮定からある $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad (^\forall n \geq N_a),$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (^\forall n \geq N_b).$$

そこで, $N_\varepsilon := \max\{N_a, N_b\}$ とおくと

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon)$$

となるので

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&\leq M|b_n - b| + (|b|+1)|a_n - a| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + (|b|+1)\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \\
&= \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon).
\end{aligned}$$

以上により

$$a_n b_n \to ab \quad (n \to \infty).$$

□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

注

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|
\end{aligned}
$$

の式変形から予想して, 仮定よりある $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad ({}^\forall n \geq N_a),
$$

$$
|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a_n|+1)} \quad ({}^\forall n \geq N_b)
$$

とすればよさそうな気がするが (講義で話したとおり $+1$ は分母が 0 にならないための工夫)

$$
\frac{\varepsilon}{2(|a_n|+1)}
$$

が n に依存しているのでよくない. 実際, a_n が a に収束することの定義は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
|a_n - a| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon)
$$

であったが, これは「どんな半径 ε を選んでもある番号が存在してその番号以降では数列 a_n と収束先 a の距離が ε 未満となる」であった. 半径 $\varepsilon/2(|a_n|+1)$ が番号 n によらず定まっていてはじめて収束の定義が使える.

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\
&\leq |a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| \\
&= |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|
\end{aligned}
$$

と変形しても同じことである. だから収束列は有界列であることから n に依存しない正定数 M を持ち出している.

問 2　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を有界な実数列とし,

$$
S_n := \{a_k \in \mathbb{R} : k \geq n\} \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})
$$

とおく, すなわち

$$
S_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad S_2 = \{a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \quad S_3 = \{a_3, a_4, a_5, \ldots\}.
$$

次に, 各 S_n の最小上界, 最大下界を使って数列 $\{\overline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\underline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定義する:

$$
\overline{a}_n := \sup S_n, \quad \underline{a}_n := \inf S_n.
$$

このとき, $\{\overline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少列, (すなわち $\overline{a}_1 \geq \overline{a}_2 \geq \overline{a}_3 \geq \cdots$ をみたす), $\{\underline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列, (すなわち $\underline{a}_1 \leq \underline{a}_2 \leq \underline{a}_3 \leq \cdots$ をみたす) であることを証明せよ.

証明　$n \in \mathbb{N}$ とする. S_n と S_{n+1} に対して, $S_{n+1} \subset S_n$ より

$$
\sup S_{n+1} \leq \sup S_n, \quad \inf S_{n+1} \geq \inf S_n,
$$

すなわち

$$
\overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n, \quad \underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1} \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}).
$$

以上により $\{\overline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少列であり $\{\underline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列である.　□

問 3 **(限りなくルートが続く数列)** $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ と定義され, 一般項

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

なる数列を考える.[1] 以下の問に答えよ.

(1) 数学的帰納法を用いて

$$a_n \leq 2 \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

であることを示せ.

解答例

(a) $n = 1$ のとき, $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. よって成立.

(b) $n = k$ のとき, $a_k \leq 2$ と仮定する. $n = k + 1$ のとき, $a_{k+1} \leq 2$ を示す. 数列の定義より

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$$

よって $n = k + 1$ のときにも $a_{k+1} \leq 2$ が成立.

以上により数学的帰納法から

$$a_n \leq 2 \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

である. □

(2) 数学的帰納法を用いて $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加であることを示せ.

解答例　$a_n \leq a_{n+1} ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$ を示せばよい.

(a) $n = 1$ のとき, $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ より,

$$a_1 = \sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$$

[2] よって成立.

---

[1] $n \in \mathbb{N}$ を止めるたびに a_n は n 重根号であり実数（正の実数）であるので, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列である.

[2] $a_1 = \sqrt{2}$ と $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ の大小比較は

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \\
&= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{2+\sqrt{2}-2}{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

でもよい.

(b) $n = k$ のとき, $a_k \leq a_{k+1}$ と仮定する. $n = k+1$ のとき, $a_{k+1} \leq a_{k+2}$ を示す.

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \leq \sqrt{2 + a_{k+1}} = a_{k+2}$$

[3] よって $n = k+1$ のときにも成立.

以上により数学的帰納法から

$$a_n \leq a_{n+1} \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

であり, つまり $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加である. □

(3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを示せ.

解答例　(2) から $a_n \leq 2$ (${}^{\forall} n \in \mathbb{N}$) であるので $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は上に有界である.
さらに, $a_n \leq a_{n+1}$ (${}^{\forall} n \in \mathbb{N}$) より $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加な数列である.
よって, 上に有界で単調増加な数列は収束するので $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する. □

[3] $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$ と $a_{k+2} = \sqrt{2 + a_{k+1}}$ の大小比較は

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= \sqrt{2 + a_{k+1}} - \sqrt{2 + a_k} \\ &= \sqrt{2 + a_{k+1}} - \sqrt{2 + a_k} \times \frac{\sqrt{2 + a_{k+1}} + \sqrt{2 + a_k}}{\sqrt{2 + a_{k+1}} + \sqrt{2 + a_k}} \\ &= \frac{2 + a_{k+1} - (2 + a_k)}{\sqrt{2 + a_{k+1}} + \sqrt{2 + a_k}} \\ &= \frac{a_{k+1} - a_k}{\sqrt{2 + a_{k+1}} + \sqrt{2 + a_k}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

でもよい.