解析学序論 I・自習シート

問 1　$a_n \neq 0$, $\alpha \neq 0$ なる数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

とする．このとき

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\alpha} \quad (n \to +\infty)$$

を証明せよ．(まず $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある番号から先で $|\alpha|/2$ を上回ることを証明する．テキスト P.9 を参考にせよ.)

解答例　任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon)$$

を示す．まずはじめに $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある番号から先で $|\alpha|/2$ を上回ることを証明する．仮定よりある $N_a \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2} \quad ({}^\forall n \geq N_a)$$

よって

$$\begin{aligned} |a| &= |a - a_n + a_n| \\ &\leq |a - a_n| + |a_n| \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} |a_n| &\geq |a| - |a - a_n| \\ &> |a| - \frac{|a|}{2} \\ &= \frac{|a|}{2} \quad ({}^\forall n \geq N_a) \end{aligned}$$

これをふまえ, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 仮定よりある $\tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2\varepsilon}{2} \quad ({}^\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon)$$

ゆえに, $N_\varepsilon := \max\{N_a, \tilde{N}_\varepsilon\}$ とおくと

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| &= \left|\frac{\alpha}{a_n\alpha} - \frac{a_n}{a_n\alpha}\right| \\ &= \frac{|\alpha - a_n|}{|a_n||a|} \\ &< \frac{|\alpha|^2\varepsilon}{2}\frac{2}{|\alpha|}\frac{1}{|\alpha|} = \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon) \end{aligned}$$

以上により成立.　□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 2　数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

とする. このとき

$$c_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

についても

$$c_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

を証明せよ.

解答例　任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|c_n - \alpha| < \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon)$$

を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 仮定よりある $\tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ({}^\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon)$$

今, $M := \max\{|a_1 - \alpha|, |a_2 - \alpha|, \ldots, |a_{\tilde{N}_\varepsilon - 1} - \alpha|\}$ とおくと

$$|a_n - \alpha| \leq M \quad ({}^\forall n = 1, 2, \ldots, \tilde{N}_\varepsilon - 1)$$

さらにアルキメデスの原理により, 十分大きな $N_\varepsilon > \tilde{N}_\varepsilon$ で

$$\frac{2M(\tilde{N}_\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon$$

を満たす自然数 N_ε が取れるので, $n \geq N_\varepsilon$ のとき

$$\frac{2M(\tilde{N}_\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon \leq n$$

つまり

$$\frac{M(\tilde{N}_\varepsilon - 1)}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
|c_n - \alpha| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| \\
&= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \frac{n\alpha}{n} \right| \\
&= \left| \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \right| \\
&\leq \left| \frac{a_1 - \alpha}{n} \right| + \left| \frac{a_2 - \alpha}{n} \right| + \cdots + \left| \frac{a_{\tilde{N}_\varepsilon - 1} - \alpha}{n} \right| + \left| \frac{a_{\tilde{N}_\varepsilon} - \alpha}{n} \right| + \cdots + \left| \frac{a_n - \alpha}{n} \right| \\
&\leq \frac{|a_1 - \alpha|}{n} + \frac{|a_2 - \alpha|}{n} + \cdots + \frac{|a_{\tilde{N}_\varepsilon - 1} - \alpha|}{n} + \frac{\varepsilon}{2n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2n} \\
&\leq \frac{M}{n} + \frac{M}{n} + \cdots + \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2n} \times (n - \tilde{N}_\varepsilon + 1) \\
&\leq \frac{M}{n} \times (\tilde{N}_\varepsilon - 1) + \frac{\varepsilon}{2n} \times n \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon \quad ({}^\forall n \geq N_\varepsilon)
\end{aligned}$$

以上により成立. □

問 3　$f : [0,1] \to [0,1)$ を

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & もし\ x = \dfrac{1}{n} \quad (ただし\ n\ は自然数)\ のとき, \\ x & それ以外. \end{cases}$$

とする. このとき f は全単射であることを証明せよ.

解答例　まずは全射であることを示す. すなわち $f([0,1]) = [0,1)$ を示せばよい.
($\subset$) 任意の $y \in f([0,1])$ に対して, 像の定義からある $x \in [0,1]$ が存在して

$$y = f(x).$$

上の f の定義から, x が $1/n$ の形をしている場合, $y = f(x) = 1/(n+1)$ の定義から $0 < y < 1$. x がその形でない場合, $y = f(x) = x$ の定義と $x \neq 1$ であることに注意して $0 \leq y < 1$. よってどの場合においても $y \in [0,1)$ となる. すなわち $f([0,1]) \subset [0,1)$.
($\supset$) 任意の $y \in [0,1)$ に対して

(i) $y = 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots$, つまり, ある $n \in \mathbb{N}$ を用いて $y = 1/(n+1)$ となるとき, $x = 1/n \in [0,1]$ であり, さらに $y = f(x)$ である. よって $y \in f([0,1])$.

(ii) そうでないとき (ある $n \in \mathbb{N}$ を用いて $y = 1/(n+1)$ とならないとき), $x = y \in [0,1)$ であり, さらに $y = f(x)$ となる. よって $y \in f([0,1])$.

ゆえに, $f([0,1]) \supset [0,1)$.

以上により $f([0,1]) = [0,1)$ となり $f : [0,1] \to [0,1)$ は全射である.

次に単射であることを示す. $x_1, x_2 \in [0,1]$ で $x_1 \neq x_2$ とする.

(i) x_1, x_2 がともに $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, \ldots$ の形でない場合,

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = x_2$$

より $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) ある $n \in \mathbb{N}$ を用いて $x_1 = 1/n$, しかし x_2 は $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, \ldots$ の形でない場合,

$$f(x_1) = \frac{1}{n+1}, \quad f(x_2) = x_2$$

より $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(iii) ある $n \in \mathbb{N}$ を用いて $x_2 = 1/n$, しかし x_1 は $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, \ldots$ の形でない場合,

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = \frac{1}{n+1}$$

より $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(iv) ある $n, m \in \mathbb{N}$; $n \neq m$ を用いて $x_1 = 1/n$, $x_2 = 1/m$ の場合,

$$f(x_1) = \frac{1}{n+1}, \quad f(x_2) = \frac{1}{m+1}.$$

しかし $n \neq m$ より $f(x_1) \neq f(x_2)$.

いずれの場合にも $f(x_1) \neq f(x_2)$ となり $f : [0,1] \to [0,1)$ は単射である. □

問 4　$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ とし, さらに $h : X \to Z$ を

$$h(x) := g(f(x)) \quad ({}^{\forall}x \in X)$$

と定義する (合成写像). (1) と (2) を証明せよ.

(1) h が単射であれば, f も単射である.

解答例　背理法で示す. もし f が単射でないならばある $x_1, x_2 \in X$ で $x_1 \neq x_2$ が存在して

$$f(x_1) = f(x_2).$$

このとき, $g : Y \to Z$ は写像なので $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ を満たす, つまり

$$h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$$

となり, h が単射であることに矛盾する. よって f は単射である. □

(2) h が全射であれば, g も全射である.

解答例　$g(Y) = Z$, すなわち, $g(Y) \subset Z$ かつ $g(Y) \supset Z$ を示せばよい. 像の定義から $g(Y) \subset Z$ は常に成り立つ. 次に $g(Y) \supset Z$ を示す. 任意の $z \in Z$ に対してある $y \in Y$ が存在して

$$z = g(y)$$

であることを示せばよい. 任意の $z \in Z$ に対して, h が全射よりある $x \in X$ が存在して

$$z = h(x).$$

このとき, $f : X \to Y$ より $y = f(x)$ とおくと $y \in Y$ を満たす, つまり

$$z = h(x) = g(f(x)) = g(y)$$

となり, $g(Y) \supset Z$ が証明できたので, $g(Y) = Z$, すなわち g は全射である. □