2021/6/24/No.7

解析学序論 I・自習シート

問 1　$f : X \to Y$ が単射とする. このとき, 逆像

$$f^{-1}(\{y\})$$

は空集合かまたは一点からなる集合となることを証明せよ [1)].

解答例　$y \in R(f) \subset Y$ とする. 任意の $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ に対して, $x_1 = x_2$ を示せばよい. 背理法で示す. もし $x_1 \neq x_2$ ならば, f が単射であることから

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

一方で逆像の定義から仮定 $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ より

$$f(x_1) \in \{y\}, \quad f(x_2) \in \{y\}$$

を得るが $\{y\}$ は一点からなる集合なので

$$f(x_1) = y = f(x_2)$$

となり, 矛盾する. よって $x_1 = x_2$ である (任意の 2 点 $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ に対して $x_1 = x_2$ が示されたので $f^{-1}(\{y\})$ は一点 x_1 からなる集合 $\{x_1\}$ である). 次に $y \notin R(f)$ とすると, $y = f(x)$ を満たす $x \in X$ は存在しない. よって $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ である.

問 2　$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, $ad - bc \neq 0$ ならば f が全単射であることを証明せよ.

解答例　まず全射について考える.

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおく. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ か否かを考える. 必ず $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ は成立するので, $f(\mathbb{R}^2) \supset \mathbb{R}^2$ か否かを考えればよい. 任意の $y \in \mathbb{R}^2$ に対して, $y \in f(\mathbb{R}^2)$, つまりある $x \in \mathbb{R}^2$ が存在して $y = f(x)$ となるかどうかを考える.

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1)] すなわち任意の $R(f) \subset Y$ に対して

$$y \mapsto \{x\} := f^{-1}(\{y\}) \subset D(f)$$

は写像とみなせ これを $x = f^{-1}(y)$ とおくことで逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ として定義できることを意味する. またこのとき $f^{-1} : Y \to X$ は単射であることも分かる.

とおくと, それは

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 &= y_1, \\ cx_1 + dx_2 &= y_2 \end{cases}$$

を満たすかどうか, つまり連立方程式が解けるかどうかと同値である. 上を d 倍, 下を b 倍して

$$\begin{cases} adx_1 + bdx_2 &= dy_1, \\ bcx_1 + bdx_2 &= by_2, \end{cases}$$

より消去法によって

$$(ad-bc)x_1 = dy_1 - by_2$$

を得る. ここで, $ad-bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \frac{1}{ad-bc}(dy_1 - by_2),$$

また, 上に代入して

$$\frac{a}{ad-bc}(dy_1 - by_2) + bx_2 = y_1,$$

$$bx_2 = \frac{ad-bc}{ad-bc}y_1 - \frac{a}{ad-bc}(dy_1 - by_2) = \frac{-bc}{ad-bc}y_1 + \frac{ab}{ad-bc}y_2,$$

$$x_2 = \frac{1}{ad-bc}(-cy_1 + ay_2)$$

を得る. すなわち $ad-bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる.

次に単射について考える.

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

とおく. 単射の定義の対偶から

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \quad f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 \\ c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

に対して, $f(x) = f(\tilde{x})$ ならば $x = \tilde{x}$ を示せばよい. $f(x) = f(\tilde{x})$ とすると

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 &= a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2, \\ cx_1 + dx_2 &= c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2. \end{cases}$$

上を d 倍, 下を b 倍して

$$\begin{cases} adx_1 + bdx_2 &= ad\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \\ bcx_1 + bdx_2 &= bc\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \end{cases}$$

より消去法によって

$$(ad-bc)x_1 = (ad-bc)y_1$$

を得る. ここで, $ad-bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \tilde{x}_1$$

を得る. 次にこれを上に代入すれば $b \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られ, 下に代入すれば $d \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ を得る. つまり $b \neq 0$ もしくは $d \neq 0$ のどちらかが仮定されていれば $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られることになるが, $b = d = 0$, つまりそのどちらも成立しないときは $ad-bc \neq 0$ を満たさなくなるので, これらの仮定は全て $ad-bc \neq 0$ の仮定でまとめられる. すなわち, $ad-bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる.

別解　線形代数の知識を使えば証明は簡潔になる．実際，

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと，$f(x) = Ax$ を意味し，$ad - bc \neq 0$ の条件から A は正則行列すなわち $A^{-1}A = AA^{-1} = E$(単位行列) を満たす行列 A^{-1} が存在する．また A^{-1} は

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で得られていた．上記解答例に合わせて議論していくと，任意の $y \in \mathbb{R}^2$ に対して，$y \in f(\mathbb{R}^2)$，つまりある $x \in \mathbb{R}^2$ が存在して $y = f(x)$ となるかどうかを考える．$A^{-1}A = E$ であったことに注意して

$$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y$$

の左から A^{-1} をかければ

$$A^{-1}Ax = A^{-1}y,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を得る．すなわち $ad - bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる．単射についても $f(x) = f(\tilde{x})$ ならば $x = \tilde{x}$ を示せばよいが，$Ax = A\tilde{x}$ の両辺に A^{-1} を写像としてかければ $x = \tilde{x}$ を得る．すなわち，$ad - bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる．

問 3　$I \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする．

> $^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta_\varepsilon > 0$ s.t.
>
> $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (^\forall x \in I, ^\forall a \in I; |x - a| < \delta_\varepsilon)$$

を満たすとき，f は I 上で一様連続であるという．次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 2x$ は点 $x = a$ において連続であることを証明せよ．

解答例　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ とおけば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |2x - 2a| \\ &< 2\delta_\varepsilon \\ &= \varepsilon \quad (^\forall x; 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon). \end{aligned}$$

よって $f(x)$ は点 $x = a$ で連続．

(2) $f(x) = 2x$ は $\mathbb{R}$ において一様連続であることを証明せよ．

解答例　上記 (1) の $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ は $\varepsilon > 0$ のみに依存し $a \in \mathbb{R}$ に依存せず選べている. すなわち

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |2x - 2a| \\ &< 2\delta_\varepsilon \\ &= \varepsilon \quad ({}^\forall x, a \in \mathbb{R}; 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon).\end{aligned}$$

を満たすので, $f(x) = x$ は $\mathbb{R}$ において一様連続である.

(3) $g(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ において連続であることを証明せよ.

解答例　任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\delta_{a,\varepsilon} := \min\{1, \varepsilon/(1+2|a|)\}$ とおけば

$$\begin{aligned}|g(x) - g(a)| &= |x^2 - a^2| \\ &= |x-a||x+a| \\ &\leq |x-a|(|x| + |a|) \\ &\leq |x-a|(|x-a| + |a| + |a|) \\ &< \delta_{a,\varepsilon}(\delta_{a,\varepsilon} + 2|a|) \\ &\leq \delta_{a,\varepsilon}(1 + 2|a|) \\ &< \varepsilon \quad ({}^\forall x; 0 < |x-a| < \delta_{a,\varepsilon}).\end{aligned}$$

よって $g(x)$ は点 $x = a$ で連続となり, $a \in \mathbb{R}$ の任意性から $g(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ において連続である.

(4) $g(x) = x^2$ は $I := [0,1]$ において一様連続であることを証明せよ.

解答例　$x, a \in I$ ならば $|x| \leq 1$, $|a| \leq 1$ であることに注意して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ とおくと

$$\begin{aligned}|g(x) - g(a)| &= |x^2 - a^2| \\ &= |x-a||x+a| \\ &\leq |x-a|(|x| + |a|) \\ &\leq 2|x-a| \\ &< 2\delta_\varepsilon \\ &= \varepsilon \quad ({}^\forall x, a \in I; 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon).\end{aligned}$$

よって $g(x) = x^2$ は $[0,1]$ において一様連続である.

問 4　(教科書 p.11 を参考)

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1)　二項定理を用いて

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

を示せ.

解答例

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0\ 1^n\left(\frac{1}{n}\right)^0 + {}_n\mathrm{C}_1\ 1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + {}_n\mathrm{C}_2\ 1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\ 1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

□

(2)　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列であることを示せ.

解答例　$a_{n+1} - a_n \geq 0$ を示せばよい.

$$a_{n+1} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

より, a_{n+1} と a_n の第 3 項目から先の差を計算する. (a_{n+1} は 1 項だけ多いのに注意).
まず a_{n+1} の第 $n+1$ 項 (係数に $1/n!$ がある項) は上の通り最後の項の一つ手前であることに注意して (最後の括弧の中の分子 $n-1$ は括弧の個数にあたる)

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right).$$

一方 a_n の第 $n+1$ 項 (係数に $1/n!$ がある項) は (1) の最後の項で

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

これらを引く. その際に各括弧の差は

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{m}{n+1}\right)-\left(1-\frac{m}{n}\right) &= \frac{m}{n}-\frac{m}{n+1} \\ &= \frac{m(n+1)-nm}{n(n+1)} \\ &= \frac{m}{n(n+1)} > 0 \quad ({}^\forall m\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

より a_{n+1} と a_n の第 $n+1$ 項 (係数に $1/n!$ がある項) の差は

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$-\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)>0.$$

a_{n+1} と a_n の第 1 項, 第 2 項は等しく第 3 項から第 $n+1$ 項までの差はどれも正であり残るのは a_{n+1} の最後の正の項, つまり

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}-a_n \\
&\geq \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

(3) $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $a_n < 3$ を示せ.

解答例

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&< 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (2\text{ 項目からは, 初項 }1,\text{ 公比}\tfrac{1}{2}\text{の等比数列の和}) \\
&= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 3-\frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 3.
\end{aligned}$$

□

(4) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを示せ.

解答例　(2) より $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列である. また (3) より $2 < a_n < 3$ が得られているので $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である. よって, 有界な単調列は収束するので, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列である. □

数列 $a_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ について以上の考察から, $[2,3]$ の中に収束先を持つ. これを e とかき, **ネピアの数, 自然対数の底**などとよぶ.

$$e = 2.718281828459041\cdots$$

である.