解析学序論 I・自習シート

問 1　$J \subset \mathbb{R}$ とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in J \quad \text{かつ} \quad \alpha \leq x \quad ({}^\forall x \in J)$$

を満たすとき α を J の最小値とよび $\min J$ とかく. J の最小値が存在するならば

$$\min J = \inf J$$

であることを証明せよ.

解答例　$\alpha := \min J$, $\beta := \inf J$ とおき, $\alpha = \beta$ を示す. まず, inf の定義から

$$\beta \leq x \quad ({}^\forall x \in J).$$

ここで, min の定義から $\alpha \in J$ より

$$\beta \leq \alpha.$$

次に, min の定義から α は J の下界の 1 つである. 一方 β は J の最大下界であるので

$$\alpha \leq \beta.$$

ゆえに $\alpha = \beta$. □

別解　$\alpha \leq \beta$ の証明について, inf の定義より, ${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists x_\varepsilon \in J$ s.t.

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon.$$

ここで, α は J の最小値なので

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon \geq \alpha,$$

すなわち,

$$\alpha < \beta + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より

$$\alpha \leq \beta.$$

□

問 2　$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加, すなわち,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

を満たすならば, $f^{-1} : R(f) \to (a, b)$ が関数として定義できること (逆関数が存在すること) を証明せよ [1].

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] 自習シート No.7, 問 1, $y \notin R(f)$ のときには $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ となる.

解答例　まず $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が単射であることを示す．すなわち，任意の $x_1,x_2\in(a,b)$ に対して，$x_1\neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$ を示せばよい．任意の $x_1,x_2\in(a,b)$ で $x_1\neq x_2$ を満たすと仮定すると，$x_1<x_2$ または $x_1>x_2$ のいずれかが成立する．

$$x_1<x_2 \quad \text{のとき} \quad f(x_1)<f(x_2) \quad \text{すなわち}\ f(x_1)\neq f(x_2),$$

$$x_1>x_2 \quad \text{のとき} \quad f(x_1)>f(x_2) \quad \text{すなわち}\ f(x_1)\neq f(x_2).$$

よって，f は単射である．

次に，$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は単射であるので，任意の $y\in R(f)=f((a,b))\subset\mathbb{R}$ に対して逆像 $f^{-1}(\{y\})$ は一点集合 $\{x\}\subset(a,b)$ となる．よって，

$$f^{-1}:R(f)\to(a,b)$$

を

$$f^{-1}(y):=x$$

によって定義できる．　□

問 3　$f\in C([a,b])$ とする．$f([a,b])$ は有界集合であることを背理法で証明せよ．

解答例　背理法で示す．もし成立しないならば，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，ある $x_n\in[a,b]$ が存在して $|f(x_n)|>n$ を満たすが，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[a,b]$ より $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界となり，収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ をもつ．この収束先を $c\in[a,b]$ とおくと，$|f|$ の連続性から

$$\lim_{k\to+\infty}|f(x_{n_k})|=|f(c)|<+\infty.$$

一方で，

$$\lim_{k\to+\infty}|f(x_{n_k})|\geq\lim_{k\to+\infty}n_k=+\infty.$$

となり矛盾．よって $f([a,b])$ は有界集合となる．　□

問 4　$f\in C([a,b])$ とする．f は $[a,b]$ 上で最大値をもつことを証明せよ．[2)]

解答例　$I:=[a,b]$ とおく．$M:=\sup f(I)$ とおくと，問 2 より $M<+\infty$．このとき，ある $x_0\in I$ が存在して $f(x_0)=M$ となることを示せばよい．上限の定義から，

(i) $f(x)\leq M \quad ({}^\forall x\in I)$;

(ii) ${}^\forall\varepsilon>0,\ {}^\exists y_\varepsilon\in f(I)$ s.t. $M-\varepsilon<y_\varepsilon$.

任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$\varepsilon:=1/n$ として (ii) を用いると，ある $y_n\in f(I)$ が存在して

$$M-\frac{1}{n}<y_n$$

$f(I)$ の定義 (像の定義) から，ある $x_n\in I$ が存在して $y_n=f(x_n)$ とかけるので，(i) とあわせて

$$|M-f(x_n)|<\frac{1}{n}$$

[2)] 教科書 p.25 の定理 15 を参考．

ここで $n \to +\infty$ とすれば

$$f(x_n) \to M \quad (n \to +\infty).$$

一方, I は有界な閉区間なので, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も有界となり収束部分列をもつ, すなわち $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $x_0 \in I$ が存在して,

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (k \to +\infty)$$

f は連続なので

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad (k \to +\infty)$$

だが, 先の計算から

$$f(x_{n_k}) \to M \quad (k \to +\infty).$$

よって

$$M = f(x_0).$$

f は点 $x = x_0$ で最大値 M をとる. $\square$