解析学序論 I・自習シート

問 1　次の関数 f の 2 階導関数 f'' と n 階導関数 $f^{(n)}$ を求めよ.

(1) $f(x)=\sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2^2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2^3}\cdot 3(1+x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\Big(3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)\Big)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad ({}^\forall n \geq 2)$$

(2) $f(x)=e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}\times(-x)' \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(e^{-x}\times(-x)') \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -e^{-x}$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-2}\times(1-x)' \\ &= (1-x)^{-2} \end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -2(1-x)^{-3} \times (1-x)' \\
&= 2(1-x)^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= 2(-3)(1-x)^{-4} \times (1-x)' \\
&= 2 \cdot 3(1-x)^{-4}
\end{aligned}
$$

よりこれを一般化して

$$
f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}
$$

(4) $f(x) = \log(1+x)$

$$
f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \left(= (1+x)^{-1}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -1(1+x)^{-2} \\
&= -(1+x)^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= -(-2)(1+x)^{-3} \\
&= 2(1+x)^{-3}
\end{aligned}
$$

よりこれを一般化して

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}
$$

定義　微分して $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数といい

$$
\int f(x)dx
$$

とかく. 一般に $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると, 定数 C を加えた関数も $f(x)$ の原始関数となり

$$
\int f(x)dx = F(x) + C
$$

とかける.

問 2　次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x}\ dx$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt[5]{x}\ dx &= \int x^{\frac{1}{5}}\ dx \\
&= \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C \quad (\text{以下}, C \text{ は積分定数})
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\ dx$

置換積分　$g = g(x)$ とおくとき, g が C^1 級ならば

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$

実際, $f(g)$ の原始関数の一つを $F(g)$ とおくと, $F'(g) = f(g)$ で, $F(g(x))$ を x について微分すれば, 合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(g(x)) &= \frac{dF}{dg}(g(x))\frac{dg}{dx}(x) \\ &= f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

よって,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))\frac{dg}{dx}(x)dx = F(g(x)) = F(g) = \int f(g)dg$$

これは高校生のときに学習したように,

$$dg = g'(x)dx$$

と形式的に変形して

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$

によって計算できることを示している.

$g = \sin x$ とおくと, $g' = dg/dx = \cos x$ で ($dg = \cos x dx$ で)

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x \ dx &= \int g^3 \frac{dg}{dx}dx \\ &= \int g^3 dg \\ &= \frac{1}{4}g^4 + C \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x + C\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\ dx$

$g = x^2 + 1$ とおくと, $g' = dg/dx = 2x$ で ($dg = 2xdx$ で)

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+1}\ dx &= \int \sqrt{g}\ \frac{dg}{dx}dx \\ &= \int g^{\frac{1}{2}}dg \\ &= \frac{2}{3}g^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$

部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

実際, $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ より

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \{f(x)g(x)\}'dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx - \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

よって,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x}\ dx &= \int x^2 (\frac{1}{2}e^{2x})'dx \\ &= x^2\frac{e^{2x}}{2} - \int (x^2)'\frac{1}{2}e^{2x}dx \\ &= \frac{x^2e^{2x}}{2} - \int xe^{2x}dx \\ &= \frac{x^2e^{2x}}{2} - \int x(\frac{1}{2}e^{2x})'dx \\ &= \frac{x^2e^{2x}}{2} - \left\{x\frac{e^{2x}}{2} - \int (x)'\frac{1}{2}e^{2x}dx\right\} \\ &= \frac{x^2e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \int \frac{1}{2}e^{2x}dx \\ &= \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int \tan x\ dx$

$g = \cos x$ とおくと, $g' = dg/dx = -\sin x$ で

$$\begin{aligned}
\int \tan x\ dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
&= \int \frac{-1}{\cos x}(-\sin x) dx \\
&= \int \frac{-1}{g}\frac{dg}{dx} dx \\
&= -\int \frac{1}{g} dg \\
&= -\log|g| + C \\
&= -\log|\cos x| + C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C}$$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\ dx$

$\displaystyle\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$ より

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-x^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\log|1+x| - \frac{1}{2}\log|1-x| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C
\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\int \log x\ dx$

$$\begin{aligned}
\int \log x\ dx &= \int (x)' \log x\ dx \\
&= x\log x - \int x(\log x)' dx \\
&= x\log x - \int x\frac{1}{x} dx \\
&= x\log x - \int dx \\
&= x\log x - x + C
\end{aligned}$$