2021/6/29/No.10

解析学序論 I・自習シート

問 1　$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ をディリクレ関数とする, すなわち

$$f(x):=\begin{cases}1 & (x\in\mathbb{Q}),\\ 0 & (x\notin\mathbb{Q}).\end{cases}$$

このとき, 区分求積法によって $[0,1]$ 区間で積分を計算をしてしまうと 1 になることを確かめよ. ただし, ここでいう区分求積法とは, 区間を n 等分し, 各区間の右端の値で長方形の面積の和を取り極限操作を行う

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})$$

を指す.

定義　微分して $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数という.

一般に $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, $C'=0$ より $F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数となる. しかし $f(x)$ の原始関数が $F(x)+C$ で全て網羅されているかどうかはまだ分からない. $y=\cos x$ の原始関数は $y=\sin x+C$ だけだろうか. $y=\sin x+C$ とは全く異なる, まだ我々の知らない何か別の関数があって, 微分したら $y=\cos x$ になるかもしれない.

しかしそのようなことはなく, $f(x)$ の原始関数どうしの違いは定数だけであることを示していく.

問 2　$f\in C([a,b])$, f は (a,b) 上で微分可能とする. このとき $f'(x)=0$ $({}^\forall x\in(a,b))$ ならば f は定数関数であること示せ [1].

証明　$x\in(a,b]$ とする. コーシーの平均値の定理を $f(x)$ と $g(x)=x$ について $[a,x]$ 上で利用すると,

問 3　$F_1(x)$ と $F_2(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の任意の原始関数とする. このとき F_1 と F_2 の差は高々定数である [2] ことを示せ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] ${}^\forall x\in[a,b]$ について, コーシーの平均値の定理を $f(x)$ と $g(x)=x$ について $[a,x]$ 上で利用せよ.

[2] 違いがあってもその差は定数という意味.