解析学序論 I・自習シート

問 1　級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

が $+\infty$ に発散することを, 次の小問に沿って証明せよ．[1]

(1)

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

を示せ.

(2) S_m を級数の第 m 項までの部分和, すなわち $S_m := \sum_{n=1}^{m} 1/n$ とおく．$S_{2m} - S_m$ に注意して, 数列 $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ はコーシー列ではないことを示せ.

(3) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ は $+\infty$ に発散すること示せ.

問 2　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする．級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が収束するならば $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であることを証明せよ.

問 3　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を単調減少数列で

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

とする．このとき正負の項が交互に現れる級数 (**交代級数**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

は収束することを, 次の小問に沿って証明せよ.

(1) S_m を級数の第 m 項までの部分和, すなわち $S_m := \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} a_n$ とおく．数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は単調増加であることを示せ.

(2) $S_{2m} < a_1$ $(m \in \mathbb{N})$, すなわち数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は上に有界であることを示せ.

(3) 数列 $\{S_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ も数列 $\{S_{2m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ も同じ値 S に収束することを示せ.

(4) 交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

は収束することを示せ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] 高校数学では区分求積法と比較によって証明済み