解析学序論 I・自習シート

問 1　A_n を空でない集合とし, $A_n \supset A_{n+1}$ $({}^\forall n \in \mathbb{N})$ と仮定する. 集合 C_n を次の様に定義する:

$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad ({}^\forall n \geq 2).$$

このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)

$$C_n \subset C_{n+1} \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}).$$

(2)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

問 2　X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値[1]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

問 3　実数列[2] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, その数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合 $\{a_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ とみて[3] 上に有界かつ下に有界のとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界数列であると定義する. このとき次を示せ.

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が有界数列.} \Longleftrightarrow {}^\exists M > 0 \text{ s.t. } |a_n| \leq M \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}).$$

問 4　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする. このとき次を証明せよ.

(1) $\inf A \leq \sup A$.

(2) $a \leq b$ $({}^\forall a \in A, {}^\forall b \in B)$ が成立するならば $\sup A \leq \inf B$.

(3) 任意の $a \in A$ に対してある $b_a \in B$ が存在して $a \leq b_a$ が成立するならば $\sup A \leq \sup B$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

1) 「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

2) 実数の数列という意味.

3) 数列を集合とみるとは, 数列の各項を元とみて, その並び順を気にしないで集まりを考えることである.