2021/5/9/No.4

解析学序論 I・自習シート

問 1　$E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合, $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする. 次の問に答えよ.

(1) E が上に有界であることの定義を論理記号 (全称記号 ($\forall$), 存在記号 ($\exists$)) を用いてかけ.

(2) (1) の否定を作り E が上に有界でないことの定義を論理記号でかけ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が以下を満たすとき, $+\infty$ に発散すると定義する: ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists N_K \in \mathbb{N}$ s.t.

$$a_n > K \quad ({}^\forall n \geq N_K).$$

数列 $\{b_n\}$ を $b_n := n$ と定義すると, $\{b_n\}$ は $+\infty$ に発散することを証明せよ.

(4) 教科書を参考に数列 $\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散することの定義を論理記号で書け.

問 2　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする. 次を証明せよ.

(1) $0 \in A$, $0 \in B$ ならば $\sup(A \cup B) \leq \sup A + \sup B$.

(2) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$. [1)]

(3) $-A := \{-x, x \in A\}$ (つまり $-A := \{y \in \mathbb{R} : {}^\exists\, x \in A \text{ s.t. } y = -x\}$) と定義すると

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

1) ただし, 任意の実数 $r, s \in \mathbb{R}$ に対して $\min\{r, s\}$ とは r と s の小さい方と定義する. すなわち

$$\min\{r, s\} := \begin{cases} r & \text{if} \quad r \leq s, \\ s & \text{if} \quad r > s. \end{cases}$$