解析学序論 I・自習シート

問 1　数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad (n \to \infty)$$

とする. このとき

$$a_n b_n \to ab \quad (n \to \infty)$$

を証明せよ. ($\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるので有界であることに注意し, テキスト P.8 を参考にせよ.)

問 2　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を有界な実数列とし,

$$S_n := \{a_k \in \mathbb{R} : k \geq n\} \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

とおく, すなわち

$$S_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad S_2 = \{a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \quad S_3 = \{a_3, a_4, a_5, \ldots\}.$$

次に, 各 S_n の最小上界, 最大下界を使って数列 $\{\overline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\underline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定義する:

$$\overline{a}_n := \sup S_n, \quad \underline{a}_n := \inf S_n.$$

このとき, $\{\overline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少列, (すなわち $\overline{a}_1 \geq \overline{a}_2 \geq \overline{a}_3 \geq \cdots$ をみたす), $\{\underline{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列, (すなわち $\underline{a}_1 \leq \underline{a}_2 \leq \underline{a}_3 \leq \cdots$ をみたす) であることを証明せよ.

問 3　**(限りなくルートが続く数列)**　$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ と定義され, 一般項

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

なる数列を考える.[1] 以下の問に答えよ.

(1) 数学的帰納法を用いて

$$a_n \leq 2 \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

であることを示せ.

(2) 数学的帰納法を用いて $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加であることを示せ.

(3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを示せ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $n \in \mathbb{N}$ を止めるたびに a_n は n 重根号であり実数（正の実数）であるので, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列である.