解析学序論 I・自習シート

問 1　$a_n \neq 0$, $\alpha \neq 0$ なる数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

とする．このとき

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\alpha} \quad (n \to +\infty)$$

を証明せよ．(まず $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある番号から先で $|\alpha|/2$ を上回ることを証明する．テキスト P.9 を参考にせよ.)

問 2　数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

とする．このとき

$$c_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

についても

$$c_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

を証明せよ．

問 3　$f : [0,1] \to [0,1)$ を

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{もし } x = \dfrac{1}{n} \quad (\text{ただし } n \text{ は自然数}) \text{ のとき}, \\ x & \text{それ以外}. \end{cases}$$

とする．このとき f は全単射であることを証明せよ．

問 4　$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ とし, さらに $h : X \to Z$ を

$$h(x) := g(f(x)) \quad ({}^{\forall}x \in X)$$

と定義する (合成写像)．(1) と (2) を証明せよ．

(1) h が単射であれば, f も単射である．

(2) h が全射であれば, g も全射である．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．