解析学序論 I・自習シート

問 1　$f : X \to Y$ が単射とする．このとき, 逆像

$$f^{-1}(\{y\})$$

は空集合かまたは一点からなる集合となることを証明せよ [1]．

問 2　$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき, $ad - bc \neq 0$ ならば f が全単射であることを証明せよ．

問 3　$I \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする．

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists\delta_\varepsilon > 0$ s.t.

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (^\forall x \in I, ^\forall a \in I; |x - a| < \delta_\varepsilon)$$

を満たすとき, f は I 上で一様連続であるという．次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 2x$ は点 $x = a$ において連続であることを証明せよ．

(2) $f(x) = 2x$ は $\mathbb{R}$ において一様連続であることを証明せよ．

(3) $g(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ において連続であることを証明せよ．

(4) $g(x) = x^2$ は $I := [0, 1]$ において一様連続であることを証明せよ．

問 4　(教科書 p.11 を参考)

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (^\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく．次の問に答えよ．

(1)　二項定理を用いて

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

を示せ．

(2)　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列であることを示せ．

(3)　$\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $a_n < 3$ を示せ．

(4)　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを示せ．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] すなわち任意の $R(f) \subset Y$ に対して

$$y \mapsto \{x\} := f^{-1}(\{y\}) \subset D(f)$$

は写像とみなせ これを $x = f^{-1}(y)$ とおくことで逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ として定義できることを意味する．またこのとき $f^{-1} : Y \to X$ は単射であることも分かる．