

解析学序論 I ・ 自習シート

問 1 $J \subset \mathbb{R}$ とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in J \quad \text{かつ} \quad \alpha \leq x \quad (\forall x \in J)$$

を満たすとき α を J の最小値とよび $\min J$ とかく. J の最小値が存在するならば

$$\min J = \inf J$$

であることを証明せよ.

問 2 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ が狭義単調増加, すなわち,

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

を満たすならば, $f^{-1} : R(f) \rightarrow (a, b)$ が関数として定義できること (逆関数が存在すること) を証明せよ¹⁾.

問 3 $f \in C([a, b])$ とする. $f([a, b])$ は有界集合であることを背理法で証明せよ.

問 4 $f \in C([a, b])$ とする. f は $[a, b]$ 上で最大値をもつことを証明せよ.²⁾

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾自習シート No.7, 問 1, $y \notin R(f)$ のときには $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ となる.

²⁾教科書 p.25 の定理 15 を参考.