平成28年度 解析学序論I定期試験 No.1

__________ 専攻 __________ 回生　学生番号 __________ 名前 ________________

$\boxed{1}$　X を全体集合, $A_\alpha \subset X$ $(\alpha \in I)$ とする．ただし I は添え字とする．また, $f : X \to X$ とする．次を証明せよ．

(1)

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subset \Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c$$

(2)

$$\bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \subset f\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)$$

$\boxed{2}$　$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ を有界とする．次を証明せよ．

(1) $\sup E_1 \leq \sup E_2$

(2) $E := \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}$ とおくと

$$\inf E \leq \inf E_1 + \inf E_2$$

(3) ${}^\forall a \in E_1$, ${}^\exists b_a \in E_2$ s.t. $a \leq b_a$ ならば $\sup E_1 \leq \sup E_2$

$\boxed{3}$　数列 $\{a_n\}$ と実数 a について次の問に答えよ.

(1) $\{a_n\}$ が a に収束することの定義を ε-N 論法でかけ.

(2) $\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を ε-N 論法でかけ.

(3) 収束列は必ずコーシー列であることを証明せよ.

$\boxed{4}$　$a_n := \dfrac{1}{2n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することを ε-N 論法で証明せよ. ただし, アルキメデスの原理を用いてもよいが, どこで用いたのかはっきり述べよ.