平成29年度 解析学序論I定期試験 No.2

__________ 専攻 __________ 回生　学生番号 __________ 名前 __________

$\boxed{6}$ 次を証明せよ.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) = (0,1]$$

$\boxed{7}$ $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ とする. I を添え字とし, $A_\alpha \subset X$ $(\alpha \in I)$ とする. 次を証明せよ.

$$f\Bigl(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Bigr) \subset \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$$

$\boxed{8}$ 関数 $f(x) = -2x^2$ について $x = 0$ においての連続性を ε-δ 論法で証明せよ.

$\boxed{9}$ 次の広義積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

$\boxed{10}$ 次の関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ について次の問に答えよ.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

(1) 区間 $[0,1]$ を n 等分し, $[0,1]$ の分割 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ を考える. 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

(2) f は $[0,1]$ 上でリーマン積分可能でないことを証明せよ.

$\boxed{11}$ $f(x) = \log(1+x)$ の $x=0$ における n 近似をランダウの記号と共に等式で求めよ.

$\boxed{12}$ $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(I)$ とする. f_n が f に I 上で一様収束するならば $f \in C(I)$ を証明せよ.