平成30年度 解析学序論I定期試験 No.1

＿＿＿＿＿＿ 専攻 ＿＿＿＿＿＿ 回生　学生番号 ＿＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　X を全体集合, $A_\alpha \subset X$ $(\alpha \in I)$ とする. ただし I は添え字とする. 次を証明せよ.

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c \supset \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

$\boxed{2}$　$E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする. α を E の最小上界とすると, 言葉の定義から α は次の2つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \alpha \geq x \quad ({}^\forall x \in E); \\ \text{(ii)} \quad {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

$\boxed{3}$　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする. 次を証明せよ.

(1) $A \subset B$ ならば $\inf A \geq \inf B$

(2) ${}^\forall a \in A,\ {}^\exists b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば $\sup A \leq \sup B$

(3) $E := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ とおくと

$$\inf E \leq \inf A + \inf B$$

(4) $\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in A \quad \text{かつ} \quad \alpha \leq x \quad ({}^\forall x \in A)$$

を満たすとき α を A の最小値とよび $\min A$ とかく.
A の最小値が存在するならば $\min A = \inf A$.

裏面も $\boxed{3}$ の証明に使ってよい.

$\boxed{4}$　収束する数列は有界であることを証明せよ．また収束する数列はコーシー列であることを証明せよ．