

平成30年度 解析学序論I定期試験 No.2

専攻 _____ 回生 _____ 学生番号 _____ 名前 _____

5 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と実数 a, b に対して, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow +\infty$) ならば

$$a_n b_n \rightarrow ab \quad (n \rightarrow +\infty)$$

であることを ε - N 論法で証明せよ. ただし, 4 の事実を用いてもよい.

6 $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow Y$ とする. I を添え字とし, $A_\alpha \subset X$ ($\alpha \in I$) とする. 次を証明せよ.

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \supset \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

7 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, l \in \mathbb{R}$ とする. $f(x) \rightarrow l$ ($x \rightarrow a$) の否定, $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow a$) の否定をそれぞれ ε - δ 論法でかけ.

8 $f(x) = e^x$ の $x = 0$ における n 近似式を求めよ.

9 次の広義積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

10 $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(I)$ とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に I 上で一様収束するならば $f \in C(I)$ を証明せよ.