2021/5/13

解析学序論 I

目 次

第1章　準備

1.1　集合論

私たちは高等学校までの算数・数学で集合に関する内容について学習してきた. 例えば高等学校で学んだ集合論では, ベン図とよばれる図を効果的に用いてきた. しかし, 高等学校までの数学では図をかけば比較的に簡単に答えられる問題が数多く取り扱われているからこそであり, 図をかいて集合論の問題が解けるからといって, 集合論を理解していると判断するのは危険である [1]. 集合の性質を取り扱う集合論は大学数学において他の分野の基礎となっており非常に重要な分野であるため, ここであらためて集合論を学んでゆく. また集合論の学びを通じて証明の作法についても習得してゆく.

定義 1.1. ある定まった範囲にある対象となるものの集まりを集合という. 集合 A を構成する個々の対象となるもののことを A の元または要素という. a が A の元であることを

$$a \in A$$

とかき, a は A に属するという. この否定を

$$a \notin A$$

とかく. 元を 1 つももたない集合を $\emptyset$ とかき, 空集合とよぶ.

集合の表し方として, 元を書き並べて

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

としたり (外延的), 元が満たすべき性質 $P(a)$ を用いて

$$\{a : P(a)\}$$

とかいたりする (内包的). これは $\{a; P(a)\}$ や $\{a|P(a)\}$ とかかれることもある. ここで重要なことは "{" と "}" で囲うことにある. 例えば

$$2, 4, 6, 8, 10$$

[1] 一般に, 学校教育の算数・数学において, 図を効果的に用いることは理解の助けとなり非常に重要である. 一方で, 大学数学では厳密な理論を展開する上で, 図による説明はあくまで説明であり証明では無いと考えた方がよい.

と数を列挙しても, 今後, これを 1 から 10 までの偶数という集合を意味しているという主張は認めないという宣言である. それは

$$\{2, 4, 6, 8, 10\}$$

や

$$\{a : 1 \leq a \leq 10, a \text{ は偶数 }\}$$

とかくべきである [2]. また, これを

$$\{k : 1 \leq k \leq 10, k \text{ は偶数 }\}$$

と書いても本質的に同じである. 実際, 文字 a や k そのものに意味はない. それはちょうど高校で学んだ

$$\sum_{a=1}^{10} a, \quad \sum_{k=1}^{10} k$$

の a や k と同じことである. どちらも

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10$$

を表しており, 文字は a でも k でもどちらでもよいのと同じである [3]. 一方, 集合

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

を n が自然数から選んでいるつもりで

$$\{n : 1 \leq n \leq 10\}$$

と表現すると, 読み手はこの集合を数直線上の閉区間

$$[1, 10]$$

と解釈するかもしれない. よって, 正確に

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 10\}$$

のように, 最初に n が自然数であることを表記し [4], 後半にその性質 $P(n)$, この場合には $1 \leq n \leq 10$ を書くことがある.

---

[2] 高校まで使ってきた「小なりまたはイコール」の記号 $\leqq$ を今後 $\leq$ と書く

[3] 一般的に和の記号では k を使うのと同じように, その場面に応じて使う文字がなんとなく決まっていることもあるが, 本質的にはどの文字を使ってもいい. 和の記号を

$$\sum_{\text{和}=1}^{10} \text{和}$$

と書いても本質的には間違いではないが, おすすめしない.

[4] 記号「$\mathbb{N}$」は自然数全体を表す記号.

空集合の表記について, テキストによっては ϕ(ギリシャ文字のファイ) を空集合の記号として用いることがあるが, 正しくは $\emptyset$ (empty set) を用いるべきである. 元を 1 つも持たない集合を $\emptyset$ ではなく $\{\emptyset\}$ と書かないように注意したい. $\{\emptyset\}$ と書いてしまうと別の意味になってしまう.

定義 1.2. A, B を空でない集合とする. 任意の $x \in A$ に対して $x \in B$ を満たすとき, A は B の部分集合であると定義し

$$A \subset B \quad \text{または} \quad B \supset A$$

とかく. $A \subset B$ かつ $A \supset B$ を満たすとき

$$A = B$$

と定義する.

この「集合と集合の等号」の定義はとても重要である. ここではあらためて集合の等号について定義を与えたことになる. わざわざ「集合と集合の等号」をあらためて定義しなくとも, 私たちは等号 $A = B$ が言おうとしていることは理解できる (気がする). 例えば

$$A := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ は } 6 \text{ の倍数}\},$$

$$B := \{n \in \mathbb{N} : \text{偶数かつ, ある自然数 } k \text{ によって } n = 3k \text{ とかける数}\}$$

と集合 A, B を定義し [5], 集合 A と集合 B が等しいことを論じよう. ある人は「これは表現が変わっただけから等しい」, またある人は6 の倍数は A の元でもあり B の元でもあるから等しい」, なかには「これは明らかである」で済ませる人もいるだろう. より親切に「集合の定義の 2 つの文章

$$n \text{ は } 6 \text{ の倍数}$$

と

$$\text{偶数かつ, ある自然数 } k \text{ によって } n = 3k \text{ とかける数}$$

が同じことを言っているので集合 A と集合 B は等しい」と答えれば, 誰もが納得する気もする. 実際

$$A = \{n : P(n)\}, \quad B = \{n : Q(n)\}$$

のそれぞれの定義にある $P(n)$ と $Q(n)$ は同値である. しかし, もっと複雑な場合, $P(n)$ と $Q(n)$ が同値か否かをすぐに判断できないような場合には, 何を持って A と B が等しいと言えばいいのだろうか. つまり人によって $A = B$ の証明として十分なのか不十分なのか判断基準が異なっていては困るのである. そこで, 誰もが納得する $A = B$ の定義を, 上記によって合意形成したのである. 「任意の A の元 n に対して n は B の元と言えるし, 逆に

---

[5] 記号「:=」は左の集合や値を右で定義するという意味で用いる.

任意の B の元 n に対して n は A の元と言えるので, $A=B$」なのである．つまり,「$A\subset B$ かつ $A\supset B$ を満たしたので $A=B$」なのである．なぜならばそれが $A=B$ の定義だからである．このような考え方は, 私たちが算数・数学を教える立場になったときにも必ず活きてくるであろう[6].

ここで,「任意の $x\in A$」を「$^\forall x\in A$」や「$\forall x\in A$」と略記することがある[7]．すなわち

$$A\subset B. \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x\in B \quad (^\forall x\in A).$$

「$x\in B\ (^\forall x\in A)$」は「$^\forall x\in A, x\in B$」ともかかれる[8].

性質 1.1. A,B,C を空でない集合とする[9]．次の2つの性質が成立する:

(1) $\emptyset\subset A$.

(2) $A\subset B$, $B\subset C$ ならば $A\subset C$.

証明　(1) 定義にもどれば,「任意の $x\in\emptyset$ に対して $x\in A$」を示せばよいが $\emptyset$ は元を1つももたないので任意に $x\in\emptyset$ をとることができない．そこで対偶を示す．すなわち「任意の x で $x\notin A$ を満たす元に対して $x\notin\emptyset$」を示す．常に $x\notin\emptyset$ が成立するのでよって(1)が成立. □
(2) 任意の $x\in A$ に対して仮定 $A\subset B$ より $x\in B$．次に仮定 $B\subset C$ より $x\in C$．ゆえに $A\subset C$ [10]. □

---

[6] ところで, 私たちは小学校以来, 等号をやや曖昧に用いている.

$$7=2\times 3+1$$

は数と数を等号で結び特に問題はないが

$$7\div 3=2\cdots 1$$

のように, もはや等号として数学的に不備がありそうな表現に用いたり

$$4:2=2:1$$

のように,「比の値」なるものを定義し, 数における等号のように用いていることもある.

[7] $\forall$ の記号は「任意の」を英語で表記した「for all」の「A」を逆さにして「$\forall$」とタイピングしたのが始まりだと言われている.

[8] 記号「$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$」は左の事柄を右で定義するという意味である．また,「$x\in B\ (^\forall x\in A)$」と「$^\forall x\in A, x\in B$」の違いは「$x\in B$ for all $x\in A$」という英語の構文に従い前者を用いるか,「任意の $x\in A$ に対して $x\in B$」という日本語の構文に従い後者を用いる, または「論理記号の使用の決まりとしてこの順だ」として後者を用いるかの違いに過ぎない.

[9] 以後,「空でない」の部分は省略することがある.

[10] 例えば $A\subset B\subset C$ と推論するなど, 誰もがこの事実を明らかであると感じるであろう．しかし明らかなことほど全ての人を納得させる証明をするのは面倒である．ここでは何を示せば結論を示したことになるのかを定義に戻ることを重視している.

定義 1.3. A, B を集合とする.

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ または } x \in B\},$$
$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$
$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

と定義し, それぞれ A と B の和集合, 共通部分, 差とよぶ.

次の性質は数学基礎でも学習し, 知っている事柄ではあるが, ここではあらためて集合の等号の定義に戻って証明する方法を通じて, 和集合や共通部分の理解をしよう.

性質 1.2. A, B, C を集合とする.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

証明　($\subset$) 任意の $x \in A \cap (B \cup C)$ に対して, $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$, すなわち $x \in B$ または $x \in C$ が成立する.

(i) $x \in B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるので $x \in A \cap B$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(ii) $x \in C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ であるので $x \in A \cap C$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(i), (ii) より

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

($\supset$) 任意の $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ に対して, $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ が成立する.

(i) $x \in A \cap B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(ii) $x \in A \cap C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(i), (ii) より

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

以上より, ($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する. □

問 1.1. A, B, C を集合とする. 次を証明せよ:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ここまで, 有限個の集合の間において和集合と共通部分を取り扱ってきたが, この和集合と共通部分の概念は, 実数を含め一般に非可算集合を添え字集合に持つ集合の間において定義することができる:

定義 1.4. I を集合とし, 任意の $\alpha \in I$ に対して α に対応する集合を A_α とかく. I を添え字集合とよぶ. このとき,

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \big\{x : \text{ある}\alpha_0 \in I \text{ が存在して } x \in A_{\alpha_0}\big\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \big\{x : x \in A_\alpha \quad ({}^\forall \alpha \in I)\big\},$$

ここで, 「ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in A_{\alpha_0}$」を「${}^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$」や「$\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$」と略記することがある [11]. すなわち

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \big\{x :{}^\exists\, \alpha_0 \in I \text{ s.t. } x \in A_{\alpha_0}\big\}.$$

定義より $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ とは「任意の$\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$」の否定であるので「ある$\alpha_0 \in I$ が存在して $x \notin A_{\alpha_0}$」であり「任意の$\alpha \in I$ に対して $x \notin A_\alpha$」ではないことに注意が必要である.

問 1.2. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とかく. $E \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を記号で書け.

(1) $a < b$.

(2) $a \in \mathbb{R} \setminus E$.

(3) $x \leq a$ $({}^\forall x \in E)$.

(4) ${}^\exists x_1 \in E$ s.t. $x_1 \geq b$.

(5) ${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. $x \leq K$ $({}^\forall x \in E)$.

問 1.3. a, b, c, d, e の 5 つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

[11] ${}^\exists$ の記号は英語で表記した「there exists $\alpha_0 \in I$ such that $x \in A_{\alpha_0}$」の「E」を逆さにして「∃」とタイピングしたのが始まりだと言われている. また「s.t.」は「such that」の省略形である.

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じように全ての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b,\ c,\ d,\ e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ全て求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は A_1, A_2, A_3 のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の 3 つである.

(i) $x = b$ のとき.

(ii) $x = c$ のとき.

(iii) $x = d$ のとき.

(iv) $x = e$ のとき.

性質 1.3. A_α, B を集合とする. ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である [12]. 次の 3 つの性質が成立する:

(1)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

(2)

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

(3)

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

[12] 以後, 断りがない限り $\alpha \in I$ を添え字と添え字集合として用いる.

証明　(1) ($\subset$) 任意の $x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ に対して, $x \in B$ かつ $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. 定義より $x \in B$ かつ, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in A_{\alpha_0}$. つまり, $x \in B \cap A_{\alpha_0}$. よって, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I}(B \cap A_\alpha).$$

($\supset$) 任意の $x \in \bigcup_{\alpha \in I}(B \cap A_\alpha)$ に対して, 和集合の定義よりある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in B \cap A_{\alpha_0}$. よって, $x \in B$ かつ $x \in A_{\alpha_0}$. 再び和集合の定義より $x \in B$ かつ $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって

$$x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

以上により

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I}(B \cap A_\alpha).$$

□

(2) ($\subset$) 任意の $x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ に対して, $x \in B$ かつ $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. 定義より $x \in B$ かつ, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \notin A_{\alpha_0}$. つまり, $x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. よって, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I}(B \setminus A_\alpha).$$

($\supset$) 任意の $x \in \bigcup_{\alpha \in I}(B \setminus A_\alpha)$ に対して, 和集合の定義よりある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. よって, $x \in B$ かつ $x \notin A_{\alpha_0}$. 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって

$$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

以上により

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I}(B \setminus A_\alpha).$$

(3) ($\subset$) 任意の $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ に対して, $x \in B$ または $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, $x \in B \cup A_\alpha$ ($^\forall \alpha \in I$). 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I}(B \cup A_\alpha).$$

(ii) $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ のとき, $x \in A_\alpha$ ($^\forall \alpha \in I$). よって $x \in B \cup A_\alpha$ ($^\forall \alpha \in I$). 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I}(B \cup A_\alpha).$$

(i), (ii) より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I}(B \cup A_\alpha).$$

($\supset$) 任意の $x \in \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)$ に対して, 共通部分の定義より $x \in B \cup A_\alpha$ ($^\forall\alpha \in I$).
(i) $x \in B$ のとき, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$.
(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in A_\alpha$ ($^\forall\alpha \in I$). よって $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$. すなわち

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

(i), (ii) より

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

以上より

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha).$$

問 1.4. A_n を空でない集合とし, $A_{n+1} \subset A_n$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) と仮定する. 集合 C_n を次の様に定義する:

$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad (^\forall n \geq 2).$$

このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)
$$C_n \subset C_{n+1} \quad (^\forall n \in \mathbb{N}).$$

(2)
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

定義 1.5. X, A は $A \subset X$ を満たす集合とする. $X \setminus A$ を X に関する A の補集合といい A^c とかく. X を全体集合とよぶことがある.

性質 1.4. (ド・モルガンの法則) $\alpha \in I$ とし A_α を集合とする. 次の 2 つの性質が成立する:

(1)
$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

(2)
$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

証明　(1) ($\subset$) 任意の $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ に対して, 補集合の定義から $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. つまり,

$$x \notin A_\alpha \quad ({}^\forall \alpha \in I).$$

実際, もしそうでなければ, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, このとき $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾. ゆえに,

$$x \in A_\alpha^c \quad ({}^\forall \alpha \in I)$$

が得られるので

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

($\supset$) 任意の $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ に対して,

$$x \in A_\alpha^c \quad ({}^\forall \alpha \in I),$$

すなわち

$$x \notin A_\alpha \quad ({}^\forall \alpha \in I).$$

このとき,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

実際, もしそうでなければ, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in A_{\alpha_0}$ となるが矛盾. ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c.$$

(2) ($\subset$) 任意の $x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ に対して, 補集合の定義から $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. つまり, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

実際, もしそうでなければ, $x \in A_\alpha$ ($\forall \alpha \in I$) となるが, このとき $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾. ゆえに,

$$x \in A_{\alpha_0}^c$$

が得られるので

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

($\supset$) 任意の $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ に対して, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して

$$x \in A_{\alpha_0}^c,$$

すなわち

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

このとき,

$$x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

実際, もしそうでなければ, $x \in A_\alpha$ ($^\forall \alpha \in I$) となるが, $x \notin A_{\alpha_0}$. に矛盾. ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

問 1.5. X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値[13]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

第1章の問の解答例

問 1.1　($\subset$) 任意の $x \in A \cup (B \cap C)$ に対して, $x \in A$ または $x \in B \cap C$ が成立する.

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ であるので

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(ii) $x \in B \cap C$ のとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ であるので $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ である. ゆえに

$$x \in (A \cup B) \cup (A \cup C).$$

(i), (ii) より

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

($\supset$) 任意の $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ に対して, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が成立する.

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$.

[13]「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

(ii) $x \notin A$ のとき[14] $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ より $x \in B$ かつ $x \in C$, つまり $x \in B \cap C$ が成立するので

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(i), (ii) より

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

以上より, ($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する. □

問 1.2　(1) $a \geq b$. (2) 「$a \in \mathbb{R}$ かつ $a \notin E$」の否定なので「$a \notin \mathbb{R}$ または $a \in E$」となるが $a \in \mathbb{R}$ は仮定されているので $a \in E$. (3) 「任意の $x \in E$ に対して $x \leq a$」の否定なので, ある $x_0 \in E$ が存在して, 反例となる. つまり ${}^{\exists}x_0 \in E$ s.t. $x > a$. (4) 「 ある $x_1 \in E$ が存在して $x_1 \geq b$」の否定なので, 任意の $x \in E$ に対して $x \geq b$ を満たさないということ, つまり $x < b$ (${}^{\forall}x \in E$). (5) 「ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」の否定なので任意の $K \in \mathbb{R}$ に対して, 「任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」が否定される. つまり, ある $x_K \in E$ が存在して $x_K > K$.

注　(5) のように論理記号が複数ある場合の否定を求めるには,

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R} \boxed{\forall x \in E \boxed{x \leq K}}}$$

と本質だけ抽出してその否定[15],

$$\neg \boxed{\exists K \in \mathbb{R} \boxed{\forall x \in E \boxed{x \leq K}}}$$

を

$$\boxed{\forall K \in \mathbb{R} \boxed{\exists x_K \in E \boxed{x_K > K}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の命題の否定によって求め, 必要に応じてあらためて ${}^{\forall}K \in \mathbb{R}$, ${}^{\exists}x_K \in E$ s.t. $x_K > K$ と書いてもよい.

[14] この (i)(ii) の場合分けを $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ から

(a) $x \in A$ かつ $x \in A$;

(b) $x \in A$ かつ $x \in C$;

(c) $x \in B$ かつ $x \in A$;

(d) $x \in B$ かつ $x \in C$.

としてもよいが, (a),(b),(c) が場合分け (i) に (d) が場合分け (ii) に該当する. しかし, この後に出てくる元の個数が可算有限でない場合にはもはやそのような場合分けはできない.

[15] 記号「¬」は否定を表す記号である.

問 1.3

(1) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b\}$.

(2) (i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1, 2, 3$.

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1$.

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 2, 3$.

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 3$.

問 1.4 (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_n \subset C_{n+1}$ を示す. $n = 1$ のとき, $C_1 = \emptyset \subset C_2$ より成立. $n \geq 2$ のとき, 任意の $x \in C_n$ に対して, $x \in C_{n+1}$ を示せばよいが,

$$x \in C_n = A_1 \setminus A_n$$

より, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_n$ である. ここで, 仮定 $A_n \supset A_{n+1}$ より,

$$x \notin A_{n+1}.$$

(実際, もしそうでなく $x \in A_{n+1}$ と仮定すると, $x \in A_{n+1} \subset A_n$ となり矛盾.) ゆえに

$$x \in A_1 \setminus A_{n+1} = C_{n+1}.$$

以上より $C_n \subset C_{n+1}$. □

(2) ($\subset$) 任意の $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \in C_{n_0}.$$

このとき, $C_1 = \emptyset$ より $n_0 \neq 1$ でさらに, C_{n_0} の定義から

$$x \in A_1 \setminus A_{n_0}.$$

すなわち, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_{n_0}$ なので

$$x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

(実際, もしそうでないなら $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$ となるが, $x \notin A_{n_0}$ に矛盾.) ゆえに

$$x \in A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

となり, ($\subset$) が成立.

(⊃) 任意の $x \in A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ に対して, $x \in A_1$ かつ, $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \notin A_{n_0}.$$

(実際, もしそうでないなら任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$ となるが, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ となり矛盾.) このとき, $x \in A_1$ より $n_0 \neq 1$. ゆえに, $x \in A_1 \setminus A_{n_0} = C_{n_0}$. よって,

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

となり (⊃) が成立.

以上より等号が成立. □

問 1.5　「(1) ならば (2)」を示す. (1) を仮定する. 任意の $x \in A$ に対して, $x \in A \subset X$ より (1) を用いれば $x \in A^c \cup B$. つまり $x \in A^c$ または $x \in B$. しかし $x \in A$ を仮定しているので $x \notin A^c$ より $x \in B$. ゆえに $A \subset B$.
「(2) ならば (3)」を示す. (2) を仮定する. 背理法で示す. もしも $A \cap B^c \neq \emptyset$ ならば, ある元 $x \in A \cap B^c$ が存在する. この元 x は $x \in A$ かつ $x \in B^c$ を満たすが, $A \subset B$ より $x \in B$ かつ $x \in B^c$ となり矛盾. よって $A \cap B^c = \emptyset$.
「(3) ならば (1)」を示す.
(⊂) 任意の $x \in A^c \cup B$ に対して, X は全体集合なのでつねに $x \in X$ となる. よって $A^c \cup B \subset X$ が成立.
(⊃) 任意の $x \in X$ に対して,

(i) $x \in B$ のとき, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c$ であるが, さらに $x \notin A$ となる. 実際, もしそうでないならば $x \in B^c$ かつ $x \in A$ となるが, 共通部分の定義より $x \in A \cap B^c$ となり, (3) に矛盾する. ゆえに $x \in A^c$ を得るので, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

いずれの場合にも $x \in A^c \cup B$ となり, $A^c \cup B \supset X$ を得る.
以上により (1) の等号が成立する.

ゆえに 3 条件は同値となる. □

「(3) ならば (1)」の別解　(3) を仮定する. ド・モルガンの法則より

$$(A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

であり, $\emptyset^c = X$ より (1) が成立. □