解析学演習・自習シート

問 1　(ド・モルガンの法則) $n \in \mathbb{N}$ とし A_n を集合とする. 次の 2 つの性質を証明せよ.

(1)

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}}.$$

(2)

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}}.$$

解答例　(1) ($\subset$) 任意の $x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{c}}$ に対して, 補集合の定義から $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. つまり,

$$x \notin A_n \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}).$$

実際, もしそうでなければ, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in A_{n_0}$ となるが, このとき $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ となり矛盾. ゆえに,

$$x \in A_n^{\mathrm{c}} \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

が得られるので

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}}.$$

($\supset$) 任意の $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}}$ に対して,

$$x \in A_n^{\mathrm{c}} \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}),$$

すなわち

$$x \notin A_n \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}).$$

このとき,

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

実際, もしそうでなければ, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in A_{n_0}$ となるが矛盾. ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\mathrm{c}}.$$

(2) ($\subset$) 任意の $x \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{c}}$ に対して, 補集合の定義から $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. つまり, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \notin A_{n_0}.$$

実際, もしそうでなければ, $x \in A_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) となるが, このとき $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ となり矛盾. ゆえに,

$$x \in A_{n_0}^{\mathrm{c}}$$

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

が得られるので

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}}.$$

($\supset$) 任意の $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}}$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \in A_{n_0}^{\mathrm{c}},$$

すなわち

$$x \notin A_{n_0}.$$

このとき,

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

実際, もしそうでなければ, $x \in A_n$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) となるが, $x \notin A_{n_0}$. に矛盾. ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\mathrm{c}}.$$

問 2　$X := \{a, b, c\}$ とする. X の部分集合を全て列挙せよ (全部で 2^3 種類ある).

解答例　$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, X の 8 種類.

問 3　X は n 個の元からなる集合とする. このとき X の部分集合の種類 (個数) は 2^n 個であることを数学的帰納法で証明せよ.

解答例　簡単のため $X := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ とおく. $n = 1$ のとき, すなわち $X = \{1\}$ のとき, X の部分集合は

$$\emptyset, X$$

の $2^1 = 2$ 種類のみである. よって成立する. $n = m$ に対して $X = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ の部分集合の種類は 2^m 種類であると仮定する. $n = m+1$ のとき, すなわち $X = \{1, 2, 3, \ldots, m, m+1\}$ のとき, X の部分集合で $m+1$ を含まないもの

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{m\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, m\}$$

の総数は数学的帰納法の仮定から 2^m 種類である. 一方, X の部分集合で $m+1$ を含むものは, 上の集合に元 $m+1$ を追加した分だけ存在するので

$$\{m+1\}, \{1, m+1\}, \{2, m+1\}, \ldots, \{m, m+1\}, \{1, 2, m+1\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$$

と全てが列挙でき, 総数は同じく 2^m 種類である. 以上より X の部分集合の種類は $2^m + 2^m = 2^{m+1}$ 種類である. 数学的帰納法により任意の自然数 n に対して $X := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ の部分集合の種類 (個数) は 2^n 個である. □

注: 一般に集合 X が与えられたとき, X が有限集合 (元の個数が有限個) であろうとなかろうと, X の部分集合の全体 (すべての部分集合を集めた集合族), つまり巾 (べき) 集合のことを

$$\mathfrak{B}(X), \mathcal{B}(X), \mathcal{P}(X), 2^X$$

のように表記するのだが, 最後の表記 2^X は X が有限集合のとき, 元の個数を $|X|$ と書くならば, 問 **3** で得られたように巾集合の元の個数が $2^{|X|}$ 個になることに由来する. 堀口さん質問ありがとう.