解析学演習・自習シート

集合論の復習です．問 1 は 1 回目の講義の問題で用いた等式です．問 2 と問 3 は 2 回目の講義で用います．

問 1　X を空でない集合とし，$A, B \subset X$ に対して，$A_1 := A$, $A_2 := B^{\mathrm{c}}$, $A_k := X$ $(k \geq 3)$ とおくと

$$A \setminus B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

を示せ．

解答例　$(\subset)$ $x \in A \setminus B$ とする．このとき $x \in A = A_1$ かつ $x \notin B$, すなわち $x \in B^{\mathrm{c}} = A_2$. さらに，$A_k := X$ $(k \geq 3)$ とおいているので，

$$x \in A_n \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

が成立する．ゆえに

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

となり $(\subset)$ が成立．
$(\supset)$ $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とする．このとき

$$x \in A_n \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

が成立する．ここで，$x \in A_1 = A$ かつ $x \in A_2 = B^{\mathrm{c}}$ より

$$x \in A \setminus B$$

となり $(\supset)$ が成立．($x \in A_k = X$ $(k \geq 3)$ からは情報は増えない)．

以上より等号が成立する．　□

問 2　X を空でない集合とし，$A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ を互いに素な集合とする，すなわち

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad ({}^{\forall} i, j \in \mathbb{N}, i \neq j),$$

とする．このとき，もし

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ならば，ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \in A_{N_0} \quad \text{かつ} \quad x \notin A_n \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}, n \neq N_0)$$

を示せ．

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

解答例
$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
と仮定すると, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して,
$$x_0 \in A_{N_0}$$
を得る. 一方, 互いに素である仮定から, N_0 以外の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対しては
$$x_0 \notin A_n$$
である. もしそうでないなら, N_0 以外の自然数 $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$x_0 \in A_{N_1}$$
ということになるが, そのとき
$$x_0 \in A_{N_0} \cap A_{N_1}$$
となり, $A_{N_0} \cap A_{N_1} = \emptyset$ に矛盾する. よって成立. $\square$

注: 難しくかいてありますが, 要するに互いに素な集合の和集合に元 x_0 を選ぶと, x_0 が含まれる集合は和を取った集合のうち, たった 1 つ A_{N_0} だけ (N_0 とは何番目かは分かりませんがとにかく 1 つ) に含まれるというごく当たり前のことを言っています.

問 3　A_n を集合とし, $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ と仮定する. 集合 C_n を次の様に定義する:
$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad ({}^{\forall} n \geq 2).$$
このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)
$$C_n \subset C_{n+1} \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N}).$$

(2)
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

解答例　(1) $n \in \mathbb{N}$ とする. $C_n \subset C_{n+1}$ を示す. $n = 1$ のとき, $C_1 = \emptyset \subset C_2$ より成立. $n \geq 2$ のとき, 任意の $x \in C_n$ に対して,
$$x \in C_n = A_1 \setminus A_n$$
より, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_n$ であるが, 仮定 $A_n \supset A_{n+1}$ より, $x \notin A_{n+1}$. (実際, $x \in A_{n+1}$ と仮定すると, $x \in A_{n+1} \subset A_n$ となり矛盾.) ゆえに
$$x \in A_1 \setminus A_{n+1} = C_{n+1}.$$
以上より $C_n \subset C_{n+1}$. $\square$

(2) ($\subset$) 任意の $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$x \in C_{n_0}.$$

このとき, $C_1 = \emptyset$ より $n_0 \neq 1$ でさらに, C_{n_0} の定義から

$$x \in A_1 \setminus A_{n_0}.$$

すなわち, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_{n_0}$ なので

$$x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

(実際, もしそうでないなら $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$ となるが, $x \notin A_{n_0}$ に矛盾.) ゆえに

$$x \in A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

となり, ($\subset$) が成立.

($\supset$) 任意の $x \in A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ に対して, $x \in A_1$ かつ, $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \notin A_{n_0}.$$

(実際, もしそうでないなら, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$ となるが, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ となり矛盾.) このとき, $x \in A_1$ より $n_0 \neq 1$. ゆえに, $x \in A_1 \setminus A_{n_0} = C_{n_0}$. よって,

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

となり ($\supset$) が成立.

以上より等号が成立. $\square$