

## 解析学演習・自習シート

問1  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  を測度空間とする.  $A, B \in \mathfrak{M}$  で互いに素とする. このとき

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

が成立することを証明せよ. ただし,  $\mu(\emptyset) = 0$  を用いてもよい.

解答例  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  を測度空間と仮定しているので,  $\mu$  は完全加法性を満たす. すなわち, 互いに素な  $A_n \in \mathfrak{M} (n \in \mathbb{N})$  に対して

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成立する. そこで,  $A_1 := A, A_2 := B, A_n := \emptyset (n \geq 3)$  とおくと,  $A_n \in \mathfrak{M} (n \in \mathbb{N})$  は互いに素となる. さらに

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \cup B,$$

$$\mu(A_1) = \mu(A), \quad \mu(A_2) = \mu(B), \quad \mu(A_n) = 0 \quad (n \geq 3).$$

よって, 完全加法性より

$$\mu(A \cup B) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B)$$

を得る. □.

問2  $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  とし  $\mathfrak{M} := 2^X$ , すなわち  $X$  の部分集合全体とする. 数え上げ測度  $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$  を用いて

$$P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad (\forall A \in \mathfrak{M})$$

と定義する. 次の問いに答えよ.

(1)  $0 \leq P(A) \leq 1$  ( $\forall A \in \mathfrak{M}$ ) を証明せよ.

解答例  $X$  の元の個数は6個なので,

$$\mu(X) = 6, \quad 0 \leq \mu(A) \leq 6 \quad (\forall A \in \mathfrak{M})$$

に注意すると

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{6} \geq 0 \quad (\forall A \in \mathfrak{M}),$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{6} \leq \frac{6}{6} = 1 \quad (\forall A \in \mathfrak{M})$$

を得る. □

(2)  $(X, \mathfrak{M}, P)$  は測度空間となることを証明せよ.

解答例 数え上げ測度  $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$  は  $X$  上の測度であるので完全加法性を満たす. すなわち, 互いに素な  $A_n \in \mathfrak{M} (n \in \mathbb{N})$  に対して,

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

を満たす.  $P$  が完全加法性を満たすことを示す. 互いに素な  $A_n \in \mathfrak{M} (n \in \mathbb{N})$  に対して,

$$\begin{aligned} P \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &= \frac{1}{6} \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)}{6} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

よって,  $P$  は  $X$  上の測度となり,  $(X, \mathfrak{M}, P)$  は測度空間である.

□