解析学演習・自習シート

問　X を 1 つの空でない集合とし $\mathfrak{F}$ を X の部分集合の族とする [1]. $\mathfrak{F}$ が次の条件 (F1) から (F3) をみたすとき, $\mathfrak{F}$ を X の**有限加法族**とよぶ:

(F1) $X \in \mathfrak{F}$;

(F2) $A \in \mathfrak{F}$ ならば $A^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{F}$;

(F3) $A, B \in \mathfrak{F}$ ならば $A \cup B \in \mathfrak{F}$.

このとき, 次の (1)–(5) を満たすことを証明せよ.

(1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$.

解答例　(F1) より $X \in \mathfrak{F}$. ここで $X^{\mathrm{c}} = \emptyset$ に注意すると, (F2) より $\emptyset = X^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{F}$.　□

(2) $A, B \in \mathfrak{F}$ ならば $A \cap B \in \mathfrak{F}$.

解答例　$A, B \in \mathfrak{F}$ とする. (F2) より $A^{\mathrm{c}}, B^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{F}$. ここでド・モルガンの法則より

$$(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$$

に注意すると, (F3) より

$$(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{F}.$$

再び (F2) より

$$A \cap B \in \mathfrak{F}$$

を得る.　□

(3) $A, B \in \mathfrak{F}$ ならば $A \setminus B \in \mathfrak{F}$.

解答例　$A, B \in \mathfrak{F}$ とする. (F2) より $B^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{F}$. (2) より $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{F}$.　□

(4) 全ての自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \in \mathfrak{F}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ ならば

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathfrak{F}.$$

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

[1] 文字 $\mathfrak{F}$ は F のドイツ文字.

解答例　$N \in \mathbb{N}$ とし $A_n \in \mathfrak{F}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ とする．N についての数学的帰納法で示す．$N = 1$ のときは成立．$N = m$ のとき,

$$\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathfrak{F}.$$

が成立すると仮定すると, $N = m + 1$ のとき,

$$\bigcup_{n=1}^{m+1} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n \right) \cup A_{m+1}$$

に注意して (F3) より

$$\bigcup_{n=1}^{m+1} A_n \in \mathfrak{F}$$

が成立する．以上より数学的帰納法から全ての自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathfrak{F}$$

を得る． □

注:　この事実から

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$$

が言えるわけではない．あくまでどのような自然数 $N \in \mathbb{N}$ を選んでも有限個の和

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n$$

について $\mathfrak{F}$ の元であるということを言っていて，だからといって

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$$

は言えない．

(5) X の σ-集合族 $\mathfrak{M}$ は有限加法族である．

解答例　$\mathfrak{M}$ を X の σ-集合族とすると,

(M1) $X \in \mathfrak{M}$;

(M2) $A \in \mathfrak{M}$ ならば $A^{c} \in \mathfrak{M}$;

(M3) $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}.$$

を満たす．このとき, $\mathfrak{M}$ が (F1)–(F3) を満たすことを示せばよいが, (F1) は (M1) と, (F2) は (M2) と全く同じであるので成立する．次に (F3) を示す．$A, B \in \mathfrak{M}$ とする．

(M1) と (M2) から $\emptyset \in \mathfrak{M}$ が得られるので, $A_1 := A$, $A_2 := B$, $A_n := \emptyset$ $(n \geq 3)$ とおけば (M3) より

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$$

よって, (F3) が成立する. 以上より $\mathfrak{M}$ は X の有限加法族である.

注: 「σ-集合族」という概念は「有限加法族」という概念を含むものであるということが分かった. X の σ-集合族は必ず X の有限加法族になるが, 先の注からも分かるとおり, 必ずしも X の有限加法族が X の σ-集合族になるとは言えない.