解析学演習・自習シート

問 1　[解析学序論 I の復習] $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ を有界な集合でかつ $E_1 \subset E_2$ とする. このとき次を証明せよ.

(1) $\inf E_2 \leq \inf E_1$.

解答例　$\beta := \inf E_2$ とおく. inf の定義より

$$\beta \leq r \quad ({}^\forall r \in E_2).$$

このとき, 任意の $r \in E_1$ に対して, $E_1 \subset E_2$ より $r \in E_2$ なので

$$\beta \leq r.$$

よって β は E_1 の下界の 1 つである. 一方 $\inf E_1$ は E_1 の最大下界なので

$$\inf E_2 = \beta \leq \inf E_1$$

を得る. □

(2) $\sup E_1 \leq \sup E_2$.

解答例　$\alpha = \sup E_2$ とおく. sup の定義より

$$\alpha \geq r \quad ({}^\forall r \in E_2).$$

このとき, 任意の $r \in E_1$ に対して, $E_1 \subset E_2$ より $r \in E_2$ なので

$$\alpha \geq r.$$

よって α は E_1 の上界の 1 つである. 一方 $\sup E_1$ は E_1 の最小上界なので

$$\sup E_2 = \alpha \geq \sup E_1$$

を得る. □

問 2　$a, b \in \mathbb{R}$ とし, $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ という形をした半開区間を**基本区間**とよぶことにする. $[a, a) = \emptyset$ より空集合も基本区間としておく. さらに, $\mathbb{R}$ の集合族 $\mathfrak{A}$ として, n 個の互いに素な基本区間 $I_k \in \mathfrak{I}$ で

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

とかける区間の全体と定義する, すなわち

$$\mathfrak{A} := \left\{ I \subset \mathbb{R} : \text{互いに素な基本区間の族 } \{I_k\}_{k=1}^{n} \text{が存在して } I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \right\}.$$

例えば, $\emptyset$ や $[0, 1)$ や $[0, 1) \cup [2, 3)$ などは $\mathfrak{A}$ の元である [1]. このとき, 次の (1), (2) を満たすことを証明せよ.

(1) $A, B \in \mathfrak{A}$ に対して A と B が互いに素ならば $A \cup B \in \mathfrak{A}$.

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

[1] 文字 $\mathfrak{A}$ は A のドイツ文字.

解答例　$A, B \in \mathfrak{A}$ とし, A と B は互いに素とする. 互いに素な基本区間の族 $\{I_k\}_{k=1}^m$ と $\{J_\ell\}_{\ell=1}^n$ が存在して

$$A = \bigcup_{k=1}^m I_k, \quad B = \bigcup_{\ell=1}^n J_\ell$$

とかける. そこで $\{I_k\}_{k=1}^m$ に加えて $\{J_\ell\}_{\ell=1}^n$ について

$$I_{m+1} := J_1, I_{m+2} := J_2, \ldots, I_{m+n} := J_n$$

と通し番号で $k = 1$ から $k = m + n$ まで番号を振り直して, 基本区間の族 $\{I_k\}_{k=1}^{m+n}$ としてまとめれば (個数が m から $m + n$ に増えていることに注意), A と B は互いに素であることから, $\{I_k\}_{k=1}^{m+n}$ は互いに素である. よって

$$A \cup B = \left(\bigcup_{k=1}^m I_k\right) \cup \left(\bigcup_{\ell=1}^n J_\ell\right) = \bigcup_{k=1}^{m+n} I_k$$

となり, $A \cup B \in \mathfrak{A}$ を得る. □

注:　A と B が互いに素という仮定を課しているが, この仮定がなくても成立する. 互いに素にすれば証明が簡単になるから仮定しただけ.

(2) $A, B \in \mathfrak{A}$ ならば $A \cap B \in \mathfrak{A}$.

解答例　$A, B \in \mathfrak{A}$ とする. このとき, 互いに素な基本区間の族 $\{I_k\}_{k=1}^m$ と $\{J_\ell\}_{\ell=1}^n$ が存在して

$$A = \bigcup_{k=1}^m I_k, \quad B = \bigcup_{\ell=1}^n J_\ell$$

とかける. そこで, (k, ℓ) の順でならべて

$$\begin{gathered}(1,1), (1,2), \ldots, (1,n),\\ (2,1), (2,2), \ldots, (2,n),\\ \vdots\\ (m,1), (m,2), \ldots, (m,n)\end{gathered}$$

の順番で左上から右下まで $j = 1, 2, \ldots, mn$ まで番号を振る, つまり,

$$j = 1 \text{ が } (1,1), \quad j = 2 \text{ が } (1,2), \ldots, j = mn \text{ が } (m,n)$$

と番号を振ると, j が決まれば (k, ℓ) が 1 つ決まる. そこで

$$H_j := I_k \cap J_\ell$$

とおけば H_j は基本区間である. さらに, j に (k, ℓ) が, j' に (k', ℓ') が対応するとき

$$H_j \cap H_{j'} = (I_k \cap J_\ell) \cap (I_{k'} \cap J_{\ell'}) = \emptyset$$

なので $\{H_j\}_{j=1,2,\ldots,mn}$ は互いに素な基本区間の族となる. 以上より

$$A \cap B = \left(\bigcup_{k=1}^m I_k\right) \cap \left(\bigcup_{\ell=1}^n J_\ell\right) = \bigcup_{j=1}^{mn} H_j$$

となり, $A \cap B \in \mathfrak{A}$ を得る. □