解析学演習・自習シート

問　$a_n \in [0,\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ とし,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

とする, すなわち

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

が存在するとする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

について足していく項の順序をどのように変えても [1)] 同じ値に収束することを以下の手順に従って証明せよ [2)].

(1) 自然数の順番を入れ変えて作った並び順への写像 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について [3)]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

を示せ.

解答例　$N \in \mathbb{N}$ とする. $m_N := \max\{\varphi(k) : 1 \leq k \leq N\}$ とおくと, $m_N \geq N$ に注意して

$$\sum_{k=1}^{N} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_N} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

よって, 最左辺は N について単調かつ有界な数列なので, 極限が存在し, 両辺 $N \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

を得る.

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

1) 例えば

$$a_1 + (a_3 + a_2) + (a_5 + a_4) + (a_6 + a_8) + \cdots, \quad (\text{例 } 1)$$

としても

$$a_1 + (a_3 + a_2) + (a_6 + a_5 + a_4) + (a_{10} + a_9 + a_8 + a_7) + \cdots, \quad (\text{例 } 2)$$

としても

2) 解析学序論 I のテキスト pp.135–136 を参照.

3) 例えば, 上の例 1 で言えば

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$$

は

$$1, 3, 2, 5, 4, 6, 8, \ldots$$

へ, 例 2 で言えば

$$1, 3, 2, 6, 5, 4, 10, 9, 8, 7, \ldots$$

へ写す写像

(2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

を示せ.

解答例　$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $\{a_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ を並べ変えたものなので, (1) と同じ考察を行えば逆向きの

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

が得られ, 等式を得る. □

注 上記考察は $a_n \geq 0$ の場合に成立する. 一般に $a_n \in \mathbb{R}$ のときは, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束, つまり絶対値を取った

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が収束する場合にのみ成立する. 例えば $\log x$ のマクローリン展開から得られる式

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

に $x=1$ を代入し

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

(ただし, $a_n := (-1)^{n+1}/n$) が得られるが,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

は絶対収束しない (絶対値を取った $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は発散する). よって足していく順番を入れ変えて

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \cdots$$

とすると, この値は

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\log 2$$

に収束する, すなわち

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \log 2, \quad a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_6 + a_8 + a_5 + a_{10} + \cdots = \frac{1}{2}\log 2$$

を意味する. なお, このような場合には, 順番を入れ変えればどのような値にでも収束させられることが知られている.