解析学演習・自習シート

問　$a, b \in \mathbb{R}$ とし, $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ という形をした半開区間を**基本区間**とよぶことにする. $[a,a) = \emptyset$ より空集合も基本区間としておく. このとき, 基本区間 $I := [a,b)$ に対して $|I| := b - a$ と定義する. さらに任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{は基本区間の族} \right\},$$

$$m_*(A) := \sup \left\{ m^*(K) : K \subset A; \text{有界閉区間} \right\},$$

とおき, それぞれ $m^*(A)$ を A の (1 次元) ルベーグ外測度, $m_*(A)$ を A の (1 次元) ルベーグ内測度とよぶ. 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $m^*(A) \ge 0$ を示せ. さらに $m^*(\emptyset) = 0$ を示せ.

解答例　$A \subset \mathbb{R}$ とする. inf の定義から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある A を覆う基本区間の族 $\{I_j^{(\varepsilon)}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して

$$m^*(A) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^{(\varepsilon)}| \ge 0$$

よって, $\varepsilon > 0$ の任意性より

$$m^*(A) \ge 0.$$

次に, 空集合 $\emptyset$ も 1 つの基本区間である. よって, $J_j := \emptyset$ $(j \in \mathbb{N})$ とおけば, $|J_j| = 0$ でさらに, これら $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$ は空集合 $\emptyset$ を覆う基本区間の族であるので, $m^*(\emptyset)$ の定義から

$$m^*(\emptyset) \le \sum_{j=1}^{\infty} |J_j| = 0.$$

すなわち $m^*(\emptyset) = 0$.　□

(2) $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ならば,

$$m^*(A) \le m^*(B), \quad m_*(A) \le m_*(B)$$

をそれぞれ示せ.

解答例　まず, 外測度の単調性を示す. $A \subset B \subset \mathbb{R}$ とする. B を覆う任意の基本区間の族 $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して, $A \subset B$ より

$$A \subset B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j,$$

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れれば合格です。

つまり $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$ は A を覆う基本区間の族でもある．よって

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |J_j|$$

なので, $m^*(A)$ は

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{は基本区間の族} \right\}$$

の下界の 1 つである．一方, $m^*(B)$ はその最大下界なので.

$$m^*(A) \leq m^*(B).$$

次に, 内測度の単調性を示す．$A \subset B \subset \mathbb{R}$ とする．$F \subset A$ を満たす任意の有界閉区間 F に対して, $A \subset B$ より, F は $F \subset B$ を満たす有界閉区間の 1 つでもある．さらに, 外測度単調性より

$$m_*(B) \geq m^*(K)$$

を満たすので, $m_*(B)$ は

$$\left\{ m^*(K) : K \subset A; \text{有界閉区間} \right\}$$

の上界の 1 つである．一方, $m_*(A)$ はその最小上界なので.

$$m_*(A) \leq m_*(B).$$

□