解析学演習・自習シート

問　$a, b \in \mathbb{R}$ とし, $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ という形をした半開区間を**基本区間**とよぶことにする. $[a,a) = \emptyset$ より空集合も基本区間としておく. このとき, 基本区間 $I := [a,b)$ に対して $|I| := b - a$ と定義する. さらに任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{は基本区間の族} \right\},$$

とおき, $m^*(A)$ を A の (1 次元) ルベーグ外測度とよぶ. 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ とする. $m^*([-n,n)) = 2n$ であることと, 外測度の単調性を用いて $m^*(\mathbb{R}) = +\infty$ を証明せよ.

解答例　$n \in \mathbb{N}$ とする. $[-n,n) \subset \mathbb{R}$ より, 外測度の単調性から

$$2n = m^*([-n,n)]) \leq m^*(\mathbb{R})$$

よって, $n \to +\infty$ とすれば, $m^*(\mathbb{R}) = +\infty$ を得る. □

(2) $A \subset \mathbb{R}$ が可算集合のとき, $m^*(A) = 0$ となることを次の手順に従って証明せよ.

(i) $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ とする. 1 辺が $\varepsilon/2^n$ となる基本区間の族 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で A を覆い尽くすことができることを示せ.

解答例　A が可算集合であることから

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

とおくことができる. そこで, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ とし, a_n を中心とする 1 辺が $\varepsilon/2^n$ となる基本区間

$$I_n := \left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$

を考えると, $a_n \in I_n$ より

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

□

(ii) $\varepsilon > 0$ の任意性と inf の定義を用いて, $m^*(A) = 0$ となることを証明せよ.

解答例　$\varepsilon > 0$ とする. (i) で構成した基本区間の族に対して, 外測度の定義から

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より, $m^*(A) = 0$. □

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れれば合格です。