

解析学演習・自習シート

集合論の復習です. 問1は1回目の講義の問題で用いた等式です. 問2と問3は2回目の講義で用います.

問1 X を空でない集合とし, $A, B \subset X$ に対して, $A_1 := A, A_2 := B^c, A_k := X (k \geq 3)$ とおくと

$$A \setminus B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

を示せ.

問2 X を空でない集合とし, $A_n \subset X (n \in \mathbb{N})$ を互いに素な集合とする, すなわち

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j),$$

とする. このとき, もし

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ならば, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$x \in A_{N_0} \quad \text{かつ} \quad x \notin A_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n \neq N_0)$$

を示せ.

問3 A_n を集合とし, $A_n \supset A_{n+1} (n \in \mathbb{N})$ と仮定する. 集合 C_n を次の様に定義する:

$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad (\forall n \geq 2).$$

このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)

$$C_n \subset C_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(2)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$