

解析学演習・自習シート

問 $a_n \in [0, \infty)$ ($n \in \mathbb{N}$) とし,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

とする, すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$$

が存在するとする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

について足していく項の順序をどのように変えても ¹⁾ 同じ値に収束することを以下の手順に従って証明せよ ²⁾.

(1) 自然数の順番を入れ変えて作った並び順への写像 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ について ³⁾

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

を示せ.

解答例 $N \in \mathbb{N}$ とする. $m_N := \max\{\varphi(k) : 1 \leq k \leq N\}$ とおくと, $m_N \geq N$ に注意して...

(2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

を示せ.

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

¹⁾例えば

$$a_1 + (a_3 + a_2) + (a_5 + a_4) + (a_6 + a_8) + \cdots, \quad (\text{例 1})$$

としても

$$a_1 + (a_3 + a_2) + (a_6 + a_5 + a_4) + (a_{10} + a_9 + a_8 + a_7) + \cdots, \quad (\text{例 2})$$

としても

²⁾解析学序論 I のテキスト pp.135–136 を参照.

³⁾例えば, 上の例 1 で言えば

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$$

は

$$1, 3, 2, 5, 4, 6, 8, \dots$$

へ, 例 2 で言えば

$$1, 3, 2, 6, 5, 4, 10, 9, 8, 7, \dots$$

へ写す写像