

解析学演習・自習シート

問 $a, b \in \mathbb{R}$ とし, $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ という形をした半開区間を基本区間とよぶことにする. $[a, a) = \emptyset$ より空集合も基本区間としておく. このとき, 基本区間 $I := [a, b)$ に対して $|I| := b - a$ と定義する. さらに任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{は基本区間の族} \right\},$$

$$m_*(A) := \sup \{m^*(K) : K \subset A; \text{有界閉区間}\},$$

とおき, それぞれ $m^*(A)$ を A の (1次元) ルベーク外測度, $m_*(A)$ を A の (1次元) ルベーク内測度とよぶ. 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $m^*(A) \geq 0$ を示せ. さらに $m^*(\emptyset) = 0$ を示せ.

(2) $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ならば,

$$m^*(A) \leq m^*(B), \quad m_*(A) \leq m_*(B)$$

をそれぞれ示せ.