# 解析学演習・自習シート

**問**　$a, b \in \mathbb{R}$ とし, $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ という形をした半開区間を**基本区間**とよぶことにする. $[a,a) = \emptyset$ より空集合も基本区間としておく. このとき, 基本区間 $I := [a,b)$ に対して $|I| := b - a$ と定義する. さらに任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{は基本区間の族} \right\},$$

とおき, $m^*(A)$ を $A$ の (1 次元) ルベーグ外測度とよぶ. 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ とする. $m^*([-n,n)) = 2n$ であることと, 外測度の単調性を用いて $m^*(\mathbb{R}) = +\infty$ を証明せよ.

(2) $A \subset \mathbb{R}$ が可算集合のとき, $m^*(A) = 0$ となることを次の手順に従って証明せよ.

(i) $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ とする. 1 辺が $\varepsilon/2^n$ となる基本区間の族 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $A$ を覆い尽くすことができることを示せ.

(ii) $\varepsilon > 0$ の任意性と inf の定義を用いて, $m^*(A) = 0$ となることを証明せよ.

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。