# 解析学演習・自習シート

幾何学で学習した $\mathbb{R}^2$ における閉集合の定義について, いくつかの同値な条件があるが, これをしばらく自習シートで学んでいく. なお, 用いる記号は幾何学の講義とは異なるかもしれないので注意すること.

**定義**　$U \subset \mathbb{R}^2$ について, 以下を満たすとき, $U$ を**開集合**とよぶ: 任意の $x \in U$ に対して, ある $\varepsilon_x > 0$ が存在して, 中心 $x$, 半径 $\varepsilon_x$ の開球

$$N(x;\varepsilon_x) := \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < \varepsilon_x\}$$

が $N(x;\varepsilon_x) \subset U$ を満たす.

中心 $a$, 半径 $\varepsilon$ の開球を $N(a;\varepsilon)$ ではなく $B(a;\varepsilon)$ と書くこともある. $N$ は Neighborhood(近傍) の N, $B$ は Ball(球) の B からきている.

**定義**　$F \subset \mathbb{R}^2$ について, $F$ の補集合 $F^c$ が開集合であるとき, $F$ を**閉集合**とよぶ.

**定義**　$A \subset \mathbb{R}^2$ と $x \in \mathbb{R}^2$ について, 以下を満たすとき, $x$ は $A$ の触点という: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

また, $A$ の触点全体を $\overline{A}$ とかき, $A$ の**閉包**とよぶ.

$A$ の閉包を $\overline{A}$ ではなく $A^a$ と書くこともある. $a$ は adherent(くっつく, 付着, 見方) の a.

このとき, 次の定理が成立することを自習シートで 3 回にわたって証明する.

**定理**　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次の 3 条件は同値である:
(i) $A$ は閉集合;
(ii) $A = \overline{A}$;
(iii) もし $x_n \in A$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) と $x \in \mathbb{R}^2$ が

$$x_n \to x \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (n \to +\infty)$$

を満たすならば $x \in A$ である.

ここで, $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^2$ とは $\varepsilon$-$N$ 論法で以下で定義される: 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|x_n - x|_{\mathbb{R}^2} = d(x_n, x) = \sqrt{((x_n)_{(1)} - x_{(1)})^2 + ((x_n)_{(2)} - x_{(2)})^2} < \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon).$$

ただし $x := (x_{(1)}, x_{(2)})$, $x_n := ((x_n)_{(1)}, (x_n)_{(2)})$ と, ここでは成分表示している.

**問**　3 条件のうち (i) ならば (ii) を証明せよ.

**解答例**　$A$ が閉集合であると仮定する. 証明すべきは $A = \overline{A}$ であるので, 集合論に従い $A \subset \overline{A}$ と $A \supset \overline{A}$ をそれぞれ示せばよい.