2021/8/18/No.1

微分方程式・自習シート

問 1　次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int e^y dy$

$$\int e^y dy = e^y + C$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{y} dy$

$$\int \frac{1}{y} dy = \log|y| + C$$

(3) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$

$t = x^3 + 1$ とおくと $dt/dx = 3x^2$ より $dt = 3x^2 dx$ で

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log|t| + C \\ &= \log|x^3+1| + C \end{aligned}$$

別解 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$ を用いる

(4) $\displaystyle\int \tan x dx$

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\log|\cos x| + C \end{aligned}$$

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{N(1-N)}dN$

$$\frac{1}{N(1-N)} = \frac{\alpha}{N} + \frac{\beta}{1-N}$$

とおくと,

$$\frac{\alpha}{N} + \frac{\beta}{1-N} = \frac{\alpha(1-N)+\beta N}{N(1-N)} = \frac{(-\alpha+\beta)N+\alpha}{N(1-N)}$$

より係数比較して

$$\begin{cases} -\alpha+\beta &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{cases}$$

より $\alpha=1$, $\beta=1$, すなわち

$$\frac{1}{N(1-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{1-N}$$

と部分分数分解できるので

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{N(1-N)}dN &= \int \frac{1}{N}dN + \int \frac{1}{1-N}dN \\ &= \log|N| - \log|1-N| + C \\ &= \log\left|\frac{N}{1-N}\right| + C \end{aligned}$$

問 2　導関数の定義に従って次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= 3x^2+3xh+h^2 \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在し

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \frac{-1}{x^2+xh} \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在し

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2+xh} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

(3) $f(x)=\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在し

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

問 3　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき, 例題に従い次の極限が存在することを確認し, 各極限を $f(a)$ と $f'(a)$ を用いて表せ.

例題 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

$\displaystyle\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$ である. ここで, 関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能なので $h\to 0$ のとき $2h\to 0$ に注意して

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{2h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$$

が存在する. よって問題の極限は存在し

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h} &= \lim_{2h\to 0} 2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \\ &= 2\lim_{2h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \\ &= 2f'(a) \end{aligned}$$

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

$\displaystyle\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=(-1)\cdot\frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$ である. ここで, 関数 $f(x)$ は $x=a$ で

微分可能なので $h \to 0$ のとき $-h \to 0$ に注意して

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{-h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

が存在する．よって問題の極限は存在し

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} &= \lim_{-h \to 0} (-1) \cdot \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \\
&= -\lim_{-h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \\
&= -f'(a)
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} &= \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h} \\
&= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-h) - f(a)}{h}
\end{aligned}$$

である．ここで, 関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能なので

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在する．さらに (1) より問題の極限は存在し

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \\
&= f'(a) - (-f'(a)) \\
&= 2f'(a)
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

$h = x - a$ とおくと $x \to a$ のとき $h \to 0$ で

$$\begin{aligned}
\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} &= \frac{(h+a)f(a) - af(a+h)}{h} \\
&= f(a) - a \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}
\end{aligned}$$

である．ここで, 関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能なので

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在する．よって問題の極限は存在し

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} &= \lim_{h \to 0} \left(f(a) - a \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \\
&= f(a) - a \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= f(a) - af'(a)
\end{aligned}$$