微分方程式・自習シート

問　置換積分の公式を参考に次の計算をせよ．[1)]

(1) $\displaystyle\int (3x-2)^4 dx$

$3x-2=g$ とおくと,

$$\frac{dg}{dx}=3, \quad dx=\frac{1}{3}dg$$

より [2)]

$$\begin{aligned}\int (3x-2)^4 dx \quad \left(=\int (3x-2)^4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{dg}{dx}dx\right) &= \int g^4\cdot\frac{1}{3}dg\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}g^5+C\\ &= \frac{1}{15}(3x-2)^5+C\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx$

$\sqrt{x+1}=t$, すなわち $x=t^2-1$ とおくと,

$$\frac{dx}{dt}=2t, \quad dx=2tdt$$

より

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}dx \quad \left(=\int (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt\right) &= 2\int (t^4-t^2)dt\\ &= 2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C\\ &= \frac{2}{15}t^3(3t^2-5)+C\\ &= \frac{2}{15}(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1}+C\end{aligned}$$

[1)] 提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

(置換積分の公式)

$$\int f(g(x))g'(x)dx \left(=\int f(g)\frac{dg}{dx}dx\right)=\int f(g)dg \qquad (\text{ただし } g(x)=g)$$

(置換積分の公式の別表現)

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\left(=\int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}dt\right) \qquad (\text{ただし } x=\varphi(t))$$

書き方が違うだけでどちらも同じ.

[2)] 結果的に (置換積分の公式) の形にこだわらず

$$\frac{dg}{dx}=3$$

より

$$dx=\frac{1}{3}dg$$

と形式的に式変形し

$$\begin{aligned}\int (3x-2)^4 dx &= \int g^4\cdot\frac{1}{3}dg\\ &= \frac{1}{15}(3x-2)^5+C\end{aligned}$$

と計算できることを意味する.

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$
$\sqrt{1-x}=t$, すなわち $x=1-t^2$ とおくと,

$$\frac{dx}{dt}=-2t, \quad dx=-2tdt$$

より

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx \quad \left(=\int \frac{1-t^2}{t}(-2t)dt\right) &= 2\int (t^2-1)dt \\ &= 2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)+C \\ &= \frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}-2\sqrt{1-x}+C \\ &= -\frac{4}{3}\sqrt{1-x}-\frac{2}{3}x\sqrt{1-x}+C\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin x dx$
$\cos x = g$ とおくと,

$$\frac{dg}{dx}=-\sin x, \quad \sin x dx=-dg$$

より

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\sin x dx \quad \left(=\int (-\cos^2 x)\frac{dg}{dx}dx\right) &= -\int g^2 dg \\ &= -\frac{1}{3}g^3+C \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x+C\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\log x dx$
$\log x = g$ とおくと,

$$\frac{dg}{dx}=\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x}dx=dg$$

より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\log x dx \quad \left(=\int \log x\frac{dg}{dx}dx\right) &= \int g dg \\ &= \frac{1}{2}g^2+C \\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2+C\end{aligned}$$