微分方程式・自習シート

問　次の微分方程式に対して, 下の (i)–(iii) の関数は「一般解」「特解」「いずれでもない」のどれにあてはまるか答えよ.

(1) $(y')^2 + xy' - y = 0$

(i) $y = Cx + C^2$ (ただし C は任意定数)

解答例　$y' = C$ より, 微分方程式の左辺に代入すると

$$(y')^2 + xy' - y = C^2 + Cx - (Cx + C^2) = 0$$

となり, 微分方程式を満たす. また, この微分方程式は 1 階なので, $y = Cx + C^2$ は「一般解」である.

(ii) $y = 2x + 4$

解答例　$y' = 2$ より, 微分方程式の左辺に代入すると

$$(y')^2 + xy' - y = 4 + 2x - (2x + 4) = 0$$

となり, 微分方程式を満たす. よって, $y = 2x + 4$ は「特解」である (任意定数がない).

別解　(i) が一般解であり, 特に $y = 2x + 4$ は $C = 2$ の場合なので $y = 2x + 4$ は「特解」である.

(iii) $y = -\dfrac{x^2}{4}$

解答例　$y' = -x/2$ より, 微分方程式の左辺に代入すると

$$(y')^2 + xy' - y = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 0$$

となり, 微分方程式を満たす. しかし, この解は (i) の一般解の C をどのように選んでも実現できないので「どちらでもない」となる.

注　ここでいう「どちらでもない」は解ではないという意味ではない. 解ではあるが一般解で表現しきれない解という意味である.

(2) $y'' + 4y = 0$

(i) $y = C\sin 2x$ (ただし C は任意定数)

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

解答例　$y' = 2C\cos 2x$, $y'' = -4C\sin 2x$ より, 微分方程式の左辺に代入すると

$$y'' + 4y = (-4C\sin 2x) + 4(C\sin 2x) = 0$$

となり, 微分方程式を満たす. 一方, この微分方程式は 2 階なので, $y = C\sin 2x$ は「特解」である (任意定数が 2 個ない).

(ii) $y = \cos 2x$

解答例　$y' = -2\sin 2x$, $y'' = -4\cos 2x$ より, 微分方程式の左辺に代入すると

$$y'' + 4y = (-4\cos 2x) + 4(\cos 2x) = 0$$

となり, 微分方程式を満たす. よって, $y = \cos 2x$ は「特解」である (任意定数が 2 個ない).

(iii) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ (ただし C_1, C_2 は任意定数)

解答例　$y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x$, $y'' = -4C_1\cos 2x - 4C_2\sin 2x$ より, 微分方程式の左辺に代入すると

$$y'' + 4y = (-4C_1\cos 2x - 4C_2\sin 2x) + 4(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) = 0$$

となり, 微分方程式を満たす. また, この微分方程式は 2 階なので, $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ は「一般解」である.