2021/10/18/No.4

微分方程式・自習シート

問 1　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' - xy = 0$

解答例　$y \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} y' &= xy \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x \\ \int \frac{1}{y}dy &= \int x dx \\ \log|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ y &= \pm e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{\frac{1}{2}x^2} \\ y &= Ce^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

定数関数 $y = 0$ も微分方程式の解となるが上記一般解において $C = 0$ で表現できる.

(2) $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$

解答例

$$\begin{aligned} \frac{-1}{1+y^2}y' &= \frac{1}{1+x^2} \\ \int \frac{-1}{1+y^2}dy &= -\int \frac{1}{1+x^2}dx \\ -\mathrm{Tan}^{-1}y &= \mathrm{Tan}^{-1}x + C \\ y &= -\tan(\mathrm{Tan}^{-1}x + C) \end{aligned}$$

(3) $y'x\log x - y = 0$

解答例　$y \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} y'x\log x &= y \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x\log x} \\ \int \frac{1}{y}dy &= \int \frac{1}{\log x}\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{t}dt \qquad \left(t = \log x \text{ とおくと } dt = \frac{1}{x}dx\right) \\ \log|y| &= \log|\log x| + C_1 \\ \log|y| - \log|\log x| &= C_1 \\ \log\left|\frac{y}{\log x}\right| &= C_1 \end{aligned}$$

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れれば合格です。

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{\log x} &= \pm e^{C_1} = C \\
y &= C \log x
\end{aligned}
$$

定数関数 $y = 0$ も微分方程式の解となるが上記一般解において $C = 0$ で表現できる.

問 2　次の問に答えよ.

(1) 微分方程式

$$xy' = 2(y^2 - 1)$$

について $y \neq \pm 1$ と仮定して一般解を求めよ.

解答例　$y \neq \pm 1$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y^2 - 1} y' &= \frac{2}{x} \\
\int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy &= \int \frac{2}{x} dx \\
\log |y - 1| - \log |y + 1| &= 4 \log |x| + C_1 \\
\log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| - \log x^4 &= C_1 \\
\log \left| \frac{y-1}{x^4(y+1)} \right| &= C_1 \\
\frac{y-1}{x^4(y+1)} &= \pm e^{C_1} = C \\
\frac{y-1}{y+1} &= Cx^4 \\
y - 1 &= Cx^4(y+1) \\
y - Cx^4 y &= 1 + Cx^4 \\
y &= \frac{1 + Cx^4}{1 - Cx^4}
\end{aligned}
$$

(2) 定数関数 $y = 1$, $y = -1$ はそれぞれ微分方程式の解となることを確かめよ.

解答例　$y = 1$ について $y' = 0$ より左辺と右辺, 共に 0 となり成立. $y = -1$ についても $y' = 0$ より, やはり左辺と右辺, 共に 0 となり成立.

(3) 定数関数 $y = 1$, $y = -1$ が (1) で求めた一般解において定数 C をうまく選んで表現できるかどうか調べよ.

解答例　$y = 1$ について上記一般解において $C = 0$ で表現できる. 一方, 定数関数 $y = -1$ も微分方程式の解となるが上記一般解において C をどのように選んでも表現できない.