2021/10/25/No.5

微分方程式・自習シート

問 1　次の微分方程式の特解を求めよ.

(1)

$$\begin{cases} y' &= xe^{x^2} \\ y(1) &= e \end{cases}$$

解答例

$$\begin{aligned} y' &= xe^{x^2} \\ \int dy &= \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx \\ y &= \frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

[1] $y(1) = e$ より $x = 1$ をこの一般解に代入して

$$e = \frac{1}{2}e + C$$

$$C = \frac{1}{2}e$$

よって特解は

$$y = \frac{1}{2}(e^{x^2} + e)$$

(2)

$$\begin{cases} 2xyy' &= 1 - y^2 \\ y(1) &= 0 \end{cases}$$

解答例　$y \neq \pm 1$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{y}{1-y^2}y' &= \frac{1}{2x} \\ \int \frac{y}{1-y^2}dy &= \int \frac{1}{2x}dx \\ -\frac{1}{2}\log|1-y^2| &= \frac{1}{2}\log|x| + C_1 \\ \log|1-y^2| + \log|x| &= -2C_1 =: C_2 \\ \log|x(1-y^2)| &= C_2 \end{aligned}$$

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

[1]

$$\int xe^{x^2}dx$$

に関して, $t = x^2$ とおくと $dt = 2xe^{x}$ であるので

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$
\begin{aligned}
x(1-y^2) &= \pm e^{C_2} =: C \\
1-y^2 &= \frac{C}{x} \\
y^2 &= 1-\frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

$y(1)=0$ より $x=1$ をこの一般解に代入して

$$0 = 1 - C$$

$$C = 1$$

定数関数 $y=1$ や $y=-1$ は, 微分方程式を満たすが (特異解), 条件 $y(1)=0$ をみたさないので不適. よって特解は

$$y^2 = 1-\frac{1}{x}, \quad \left(y = \pm\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$

問 2 第 1 象限にある曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ における接線と x 軸との交点を T とする. 線分 PT が y 軸で 2 等分され, $y=f(x)$ が点 $(1,4)$ を通るときの曲線 $y=f(x)$ を求めよ.

解答例 点 $\mathrm{P}(x,y)$ における接線の方程式は (X,Y) を用いて

$$Y - y = y'(X-x)$$

で, 点 T の座標は $Y=0$ より,

$$\left(x-\frac{y}{y'}, 0\right)$$

ただし, y' が 0 ならば接線は x 軸と交わらないため, $y' \neq 0$ となる. 一方この接線の y 切片は $-xy'+y$ より線分 PT と y 軸との交点の座標は

$$(0, -xy'+y)$$

よって線分 PT が y 軸で 2 等分されるので

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}+x\right) = 0, \quad \frac{1}{2}(0+y) = -xy'+y$$

$$x - \frac{y}{2y'} = 0, \quad y = 2xy'$$

どちらからも $y=f(x)$ が満たすべき微分方程式として $x=0$ 以外のすべての x について

$$y' = \frac{y}{2x}$$

を得る. よって

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{2x}dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2}\log|x| + C_1$$

$$\log\frac{|y|}{\sqrt{|x|}} = C_1$$

$$\frac{y}{\sqrt{|x|}} = \pm e^{C_1} =: C$$
$$y = C\sqrt{|x|}$$

$y = f(x)$ は点 $(1, 4)$ を通るので

$$4 = C\sqrt{|1|}$$
$$C = 4$$

さらに $y = f(x)$ は第 1 象限の曲線なので

$$y = 4 \times \sqrt{|x|} = 4\sqrt{x}$$

$\square$

問 3　括弧内の変換を用いて次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $xy' - y - x = 0 \quad (u(x) = y(x)/x)$

解答例　$y' - \dfrac{y}{x} - 1 = 0$ より $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと $y' = u + xu'$ で

$$y' = \frac{y}{x} + 1$$
$$u + xu' = u + 1$$
$$xu' = 1$$
$$\int du = \int \frac{1}{x} dx$$
$$u = \log|x| + C$$
$$y = x(\log|x| + C)$$

(2) $(xy' - y)\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = x \quad (u(x) = y(x)/x)$

解答例　$\left(y' - \dfrac{y}{x}\right)\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = 1$ より $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと $y' = u + xu'$ で

$$(y' - u)\cos u = 1$$
$$(u + xu' - u)\cos u = 1$$
$$(\cos u)u' = \frac{1}{x}$$
$$\int \cos u du = \int \frac{1}{x} dx$$
$$\sin u = \log|x| + C$$
$$u = \mathrm{Sin}^{-1}\Big(\log|x| + C\Big)$$
$$\frac{y}{x} = \mathrm{Sin}^{-1}\Big(\log|x| + C\Big)$$
$$y = x\mathrm{Sin}^{-1}\Big(\log|x| + C\Big)$$

(3) $xy' = e^{xy} - y \qquad (u(x) = xy(x))$

解答例　$u(x) = xy(x)$ とおくと $u' = y + xy'$ で

$$
\begin{aligned}
u' &= e^u \\
e^{-u}u' &= 1 \\
\int e^{-u} du &= \int dx \\
-e^{-u} &= x + C_1 \\
e^{-u} &= C - x \quad (C := -C_1) \\
-u &= \log|C - x| \\
-xy &= \log|C - x| \\
y &= -\frac{1}{x} \log|C - x|
\end{aligned}
$$