微分方程式・自習シート

問 1　次の微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} xy' &= xy^3 - y \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

(1) $u = xy$ の変換を用いて, まずは一般解が

$$y^2 = \frac{1}{Cx^2 + 2x},$$

もしくは

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{Cx^2 + 2x}}$$

となることを示せ.

解答例　$u = xy$ とおくと, $y = u/x$ で

$$y' = \frac{u'x - u}{x^2}$$

となり, 微分方程式は

$$x\frac{u'x - u}{x^2} = x\left(\frac{u}{x}\right)^3 - \frac{u}{x},$$

$$u' - \frac{u}{x} = \frac{u^3}{x^2} - \frac{u}{x},$$

$$u' = \frac{u^3}{x^2}$$

を得る. よって変数分離形なので一般解は

$$\int \frac{1}{u^3} du = \int \frac{1}{x^2} dx,$$

$$-\frac{1}{2}u^{-2} = -\frac{1}{x} + C_1,$$

$$(xy)^{-2} = \frac{2}{x} + C, \quad (C := -2C_1),$$

$$\frac{1}{y^2} = 2x + Cx^2,$$

$$y^2 = \frac{1}{Cx^2 + 2x},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{Cx^2 + 2x}}$$

となる. □

(2) 条件 $y(1) = 1$ を用いて C を決定し, 特解が

$$y = \sqrt{\frac{1}{-x^2 + 2x}}$$

となることを示せ.

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れれば合格です。

解答例　$y(1) = 1$ より

$$1^2 = \frac{1}{C+2}$$

を満たすので, $C = -1$ を得て, 特解は

$$y = \sqrt{\frac{1}{-x^2+2x}}$$

となる. □

注　上記の特解は

$$y^2 = \frac{1}{-x^2+2x}$$

の一部分であることに注意する.

$$y = -\sqrt{\frac{1}{-x^2+2x}}$$

の方は, y は必ず負となるため $y(1) = 1$ を通らない.

問 2　質量 m (正定数) の小球を真上に投げると次第に速度 $v = v(t)$ が小さくなり, 小球はある高さで一瞬止まってその点から落下する. この運動を分析すると, 初速度 v_0 で真上に投げられた小球は下向きに一定の加速度 g (正定数) の運動をしている:

$$F = -mg. \tag{i}$$

一方, 投げた点を原点, 上向きを正の向きとして時間 t 後の位置を $h = h(t)$ とすると次のニュートンの法則が成立する:

$$F = ma = mv' = mh''. \tag{ii}$$

よって, (i)–(ii) で F を消去すれば h は次の微分方程式に従う. [1)]

$$\begin{cases} h'' &= -g, \\ h'(0) &= v_0, \\ h(0) &= 0. \end{cases}$$

この微分方程式を次の手順で解き h を求めよ.

(1) $v = h'$ と変換してまずは v の 1 階微分方程式とみて v を求める.

解答例　$v = h'$ と変換してまずは v の 1 階方程式に直すと

$$\begin{cases} v' &= -g, \\ v(0) &= v_0. \end{cases}$$

よって,

$$\int \frac{dv}{dt} dt = -\int g dt,$$
$$v = -gt + c_1.$$

[1)] 文字がたくさん出てきたが, a は加速度 (acceleration), v は速度 (velocity) を表し, それぞれ $a = h''$, $v = h'$ である.

初期条件 $v(0) = v_0$ より

$$v_0 = v(0) = c_1.$$

以上により

$$v = v_0 - gt.$$

(2) $h' = v$ を $h(0) = 0$ とともに解く.

次に,

$$\begin{cases} h' &= v_0 - gt, \\ h(0) &= 0, \end{cases}$$

を解く.

$$\int \frac{dh}{dt} dt = \int (v_0 - gt) dt,$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + c_2,$$

初期条件 $h(0) = 0$ より

$$0 = h(0) = c_2.$$

以上により

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$